1 Список принятых обозначений

$\wedge$ – операция взятия минимума
$\vee$ – операция взятия максимума
1_A – индикаторная функция события A
A^C – дополнение множества A
$\mathbb{R}$ – пространство дейсвительных чисел
Ω – пространство элементарных исходов
$\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$, etc. – σ-алгебры
P – вероятность, вероятностная мера
E – оператор математического ожидания
Var, D – дисперсия
$\mathsf{E}^{\mathcal{F}}$, $\mathsf{E}(\cdot|\mathcal{F})$ – оператор условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$
$\mathbb{F}$ – фильтрация
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – вероятностное пространство
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ – фильтрованное вероятностное пространство
$\mathrm{m}\mathcal{F}$ – множество всех $\mathcal{F}$-измеримых функций
X^τ – остановленный процесс : $X_t^\tau = X_{t\wedge\tau}$
$H \circ S$ – интегральное преобразование
м.м. – марковский момент
м.о. – момент остановки
$\mathcal{T}_{[S,T]}$ – множество всех м.о., принимающих значение из $[S, T]$
$\mathcal{M}$ – класс мартингалов
$\mathcal{M}_{gen}$ – класс обобщенных мартингалов
$\mathcal{M}_{loc}$ – класс локальных мартингалов
$T\mathcal{M}$ – класс инегральных преобразований мартингалов
$\mathcal{M}(\mathsf{P}, X) = \mathcal{M}(\mathsf{P})$ – класс мартингальных мер для X
$\mathcal{M}_{loc}(\mathsf{P}, X) = \mathcal{M}_{loc}(\mathsf{P})$ – класс локальных мартингальных мер
$\mathcal{M}_b(\mathsf{P}, X) = \mathcal{M}_b(\mathsf{P})$ – класс мартингальных мер с существенно ограниченной плотностью

$d + 1$ – количество активов
$X_t = (X_t^0, \dots, X_t^d)_{t\geqslant 0}$ – процесс цен
H – стратегия; H_t^i – количество i-ого актива в момент времени t
$H \succ \widehat{H}$ – доминирование H над $\widehat{H}$
V_t – стоимость портфеля в момент времени t
d_t – коэффициент дисконтирования
ζ – обусловленное обязательство

Часть I

Введение в теорию случайных процессов с дискретным временем

1 Оператор условного математического ожидания

Здесь и далее будем считать, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Рассмотрим пространство $\mathcal{L}_+$ неотрицательных случайных величин на нем: $\mathcal{L}_+ = \{\xi : \xi \in \mathrm{m}\mathcal{F},\ \xi \geqslant 0\}$. Пусть задана некоторая σ-алгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Тогда можно ввести оператор **условного мат. ожидания** $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}$, действующий на пространстве $\mathcal{L}_+$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Для всех $\xi \in \mathcal{L}_+$ выполняется условие измеримости: $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \in \mathrm{m}\mathcal{A}$.

2) Для всех $B \in \mathcal{A}$ справедливо равенство $\mathsf{E}(1_B \xi) = \mathsf{E}(1_B\, \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi)$.

Каждой величине ξ поставим в соответствие меру μ^{ξ}, заданную на $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$\mu^{\xi}(B) = \mathsf{E}(1_B \xi).$$

Таким образом, условие 2) можно переписать в следующем виде:

$$\mu\big|_{\mathcal{A}}(B) = \int\limits_B \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi\ d\mathsf{P}\big|_{\mathcal{A}},\ \ \forall B \in \mathcal{A}.$$

Фактически, записанное равенство является определением производной Радона-Никодима:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi = \frac{d\mu^{\xi}\big|_{\mathcal{A}}}{d\mathsf{P}\big|_{\mathcal{A}}}. \tag{1.1}$$

Поскольку правая часть (1.1) очевидно удовлетворяет условию 1) определения $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}$, равенство (1.1) можно использовать в качестве эквивалентного определения $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}$.

Замечание 1.1. $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi$ *– определено с точностью до п.в. относительно* P.

Замечание 1.2. *Для того, чтобы определить оператор условного мат.ожидания на знакопеременных случайных величинах достаточно рассмотреть представление произвольной случайной величины* $\xi = \xi_+ - \xi_-$.
Предположим, что $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi_+ \wedge \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi_- < +\infty$. *Тогда считаем, что* $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi$ *определено и положим:*

$$\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi := \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi_+ - \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi_-.$$

Таким образом, $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi$ *конечно* $\Leftrightarrow$ *конечны оба* $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi_+, \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi_-$ $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, |\xi| < +\infty$.

Кроме того, под ξ будем понимать класс эквивалентных случайных величин, так как $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\, \xi$ двух эквивалентных случайных величин совпадает почти наверное. Это позволяет нам рассматривать ξ как элемент из $L_q(\mathsf{P}), q \geqslant 1$.

Утверждение 1.1. *Оператор условного мат.ожидания переводит пространство* $L_q(\mathsf{P})$, $q \geq 1$ *в себя:* $\mathsf{E}^{\mathcal{A}} : L_q(\mathsf{P}) \to L_q(\mathsf{P})$, *более того,* $\|\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\|_q = 1$.

Упражнение 1.1. *Докажите утверждение 1.1.*

Таким образом, если $\xi \in L_1$, то $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ конечно. Обратное, вообще говоря, неверно.

Упражнение 1.2. *Привести пример.*

Непосредственно из определения вытекает следующее утверждение:

Утверждение 1.2. *Пусть $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{F}$. Тогда*

$$\mathsf{E}^{\mathcal{A}_1}\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}_2} = \mathsf{E}^{\mathcal{A}_2}\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}_1} = \mathsf{E}^{\mathcal{A}_1}.$$

В частности, если в последнем утверждении взять $\mathcal{A}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$, то получим еще одно свойство оператрра условного мат.ожидания: $\mathsf{E}\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi = \mathsf{E}\,\mathcal{A}$.

Таким образом оператор условного мат.ожидания является проектором (т.е. $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}} = \mathsf{E}^{\mathcal{A}}$).

Упражнение 1.3. *В $L_2(\mathsf{P})$ оператор $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}$ является ортогональным проектором:*

$$\langle \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi, \xi - \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \rangle = 0.$$

Замечание 1.3. *Оказывается, что в $L_2(\mathsf{P})$ оператор условного мат. ожидания можно определить как единственный самосопряженный проектор на подпространство измеримых относительно $\mathcal{A}$ случайных величин: $P^2 = P,\ P^* = P$.*

Теперь рассмотрим задачу наилучшего приближения в среднеквадратическом случайной величины ξ величиной из $\mathrm{m}\mathcal{A}$: $\|\xi - \eta\|_2 \to \min\limits_{\eta \in \mathrm{m}\mathcal{A}}$.
Оказывается, что решением этой задачи является условное мат.ожидание: $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi = \operatorname*{Argmin}\limits_{\eta \in \mathrm{m}\mathcal{A}} \|\xi - \eta\|_2$.

Пусть даны измеримые метрические пространства $(E, \mathcal{E}),\ (D, \mathcal{D})$. Пусть $\xi : \Omega \to E,\ \eta : \Omega \to D$ - измеримые функции. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ порождена $\xi : \mathcal{A} = \sigma(\xi)$. Тогда справедлива лемма:

Лемма 1.1. *η - измерима относительно $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ найдется $f : E \to D$ – $\mathcal{E}/\mathcal{D}$-измеримая, такая, что $\eta = f \circ \xi$.*

Упражнение 1.4 (*). *Какие условия необходимо наложить на E, D, f.*

Упражнение 1.5. *Рассмотрим разбиение Ω: $\Omega = \sum\limits_i A_i$ и $\mathcal{A} = \sigma(A_1, A_2, \dots),\ A_i \in \mathcal{F}$. Как посчитать $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$.*

Можно выделить следующие **свойства** оператора условного мат.ожидания:

1) $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}$–линейный ограниченный оператор.

2) Справедлив аналог теоремы Беппо Леви: Пусть $\xi_n \geqslant 0, \xi_n \uparrow \xi$, тогда и $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_n \to \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$.

3) Для произвольной $\mathcal{A}$-измеримой случайной величины η верно $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\eta\xi = \eta\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$.

4) Пусть $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{F}$. Тогда $\mathsf{E}^{\mathcal{A}_1}\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}_2} = \mathsf{E}^{\mathcal{A}_2}\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}_1} = \mathsf{E}^{\mathcal{A}_1}$.

2 Мартингальные свойства для процессов с дискретным временем

Для описания вероятностных процессов обычного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ становится недостаточно, поэтому введем следующее понятие.

Определение 2.1. ***Фильтрацией*** *$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$ называется семейство σ-алгебр со следующими свойствами:*

1) $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.

2) Для $t_1 \leqslant t_2$ выполненяется включение $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$.

Иногда $\mathbb{F}$ называют потоком σ-алгебр.

Теперь рассмотрим такую модель: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$. Этот объект называется **фильтрованным вероятностным пространством**. В рамках этой модели $\mathbb{F}$ интерпретируется как поток информации, а $\mathcal{F}_t$ – информация, доступная к моменту времени t.

Тогда условие 1) из определения фильтрации можно понимать как *достаточность* информации, а условие 2) – как ее *аккумуляцию*.

Появление фильтрации $\mathbb{F}$ обусловленно желанием рассматривать *динамику* процесса.

В данном курсе мы ограничимся изучением моделей с дискретным временем. Будут рассмотрены как случай конечного горизонта ($T = \{0, 1, \ldots, N\}$), так и бесконечного ($T = \{0, 1, \ldots\}$).

Обозначим $\xi = \xi_{\boldsymbol{\cdot}} = \{\xi_t,\ t \in T\}$–случайная последовательность.

Определение 2.2. *Под* ***адаптированной*** *(по отношению к фильтрации $\mathbb{F}$) последовательностью будем понимать такую ξ, что $\xi_t \in \mathrm{m}\mathcal{F}_t$ для всех $t \in T$.*
Обозначение: $\xi \in \mathrm{a}\mathbb{F}$.

Часто рассматривают *каноническую* фильтрацию, порожденную случайной последовательностью, т.е. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t\}$.

Введем еще несколько определений:

Определение 2.3. *Адаптированная последовательность ξ называется:*

1) ***Предсказуемой****(относительно $\mathbb{F}$), если $\xi_{t+1} \in \mathrm{m}\mathcal{F}_t$ для всех $t \in T$.*

2) ***Прогнозируемой на один шаг****, если $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1}$ определено и конечно.*

3) ***Вполне прогнозируемой****, если ξ прогнозируема на любое количество шагов, т.е. $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+s}$ определено и конечно.*

Определение 2.4. *Для вполне прогнозируемых последовательностей может быть определено* ***мартингальное свойство****: $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} = \xi_t$.*
Аналогично определяются ***субмартингальное*** *($\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} \geqslant \xi_t$) и* ***супермартингальное*** *($\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} \leqslant \xi_t$) свойства.*

Определение 2.5. ***Мартингалом*** *называется случайная последовательность ξ, если*

1) ξ обладает мартингальным свойством.

2) $\xi \in L_1$, т.е. $\forall t\ \xi_t \in L_1(\mathsf{P})$.

Если в данном определении не требовать свойства 2), то ξ называется **обобщенным** мартингалом.

Замечание 2.1. *Мартингал яваляется как суб-, так и супермартингалом.*

Замечание 2.2. *Если*

1) ξ – мартингал, то $\mathsf{E}\,\xi_t = \mathrm{const}$,

2) ξ – супермартингал, то $\mathsf{E}\,\xi_t$ – убывает, *3) ξ – субмартингал, то $\mathsf{E}\,\xi_t$ – возрастает.*

Определение 2.6. *Процесс $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ называется **обобщенным мартингалом разности** (суб- и супермартингалом) относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если*

1) η – прогнозируем,

2) $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,\eta_{t+1} = 0$, ($\geqslant$ и $\leqslant$ соответственно).

*Если дополнительно потребовать условие $\eta \in L_1$, тогда η называется **мартингалом разности**.*

Замечание 2.3. $\mathsf{E}\,\eta_t = 0,\ \forall t = 1, 2, \dots.$

Легко установить связь понятиями мартингала и мартингала разности:
если ξ – обобщенный мартингал, то $\eta_t = \xi_t - \xi_{t-1}$ является мартингалом разности. Обратно: если $\xi_0 \in \mathrm{m}\mathcal{F}_0$, а η – мартингал разности, тогда случайная последовательность $\xi_t = \xi_0 + \sum\limits_{s=1}^{t} \eta_s,\ t = 0, 1, \dots$ является мартингалом.

Пример 2.1. *Пусть $Y \in L_1(\mathsf{P})$, пусть задана фильтрация $\mathbb{F}$. Определим последовательность ξ следующим образом: $\xi_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,Y$. Тогда xi будет мартингалом (равномерно-интегрируемым).*

Пример 2.2. *Пусть $S_0,\ \{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ – независимые (в совокупности) случайные величины. Определим $S_t = S_0 + \sum\limits_{i=1}^{t} X_i$.*

Тогда если $\mathsf{E}\,X_i = 0$ и $\mathsf{E}\,S_0 < \infty$, то процесс S_t будет мартингалом в канонической фильтрации. В случае $\mathsf{E}\,X_i \geqslant 0$ получим субмартингал, а если $\mathsf{E}\,X_i \leqslant 0$ – супермартингал.

Пример 2.3. *Пусть $R_0,\ \{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ – независимые (в совокупности) случайные величины. Определим $R_t = R_0 \prod\limits_{i=1}^{t} Y_i$. Если $\mathsf{E}\,Y_i = 1$, то R – обобщенный мартингал. Если $R_0 \in L_1(\mathsf{P})$, тогда R – мартингал.*

Упражнение 2.1. *Пусть мартингал $\xi \in L_2(\mathsf{P})$. Доказать, что приращения ξ некоррелированы.*

Упражнение 2.2. *Привести пример мартингала с зависимыми приращениями.*

Упражнение 2.3. *Доказать, что у мартингала дисперсия неубывает.*

Пример 2.4 (Цепь Маркова). *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ – измеримое фазовое пространство. Будем рассматривать однородную по времени цепь Маркова X со значениями в $\mathcal{X}$, т.е. вероятность $\mathsf{P}(X_{t+h} \in A \big| X_t = x)$ – не зависит от t, а только от h. Таким образом, для определения X достаточно задать $\mathsf{P}(X_s \in A \big| X_0 = x) = P^s(x, A),\ s = 1, 2, \dots$ и задать начальное распределение X_0.*

В силу однородности по времени, справедливо:
$P^s = \underbrace{P \cdot P \cdot \ldots \cdot P}_{s \text{ раз}}$, т.е. P^s – композиция (свертка) ядер P $(P = P^1)$.

Рассмотрим произвольное переходное ядро $Q(x, A)$. Ему можно поставить в соответствие оператор Q такой, что $Qf(x) = \int Q(x, dy) f(y)$.

Определение 2.7. *Функция f называется **гармонической** (инвариантной) по отношению к Q, если $Qf = f$.*

Вернемся к нашему примеру.

Определение 2.8. *Функция f – называется **гармонической** функцией цепи, если $P^s f = f$, $\forall s$.*
*Если $P^s f \geqslant f$, тогда f – называется **субгармонической**, а если $P^s f \leqslant f$, тогда f – называется **супергармонической**.*

Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

Утверждение 2.1. *$Y_t = f(X_t)$ – мартингал тогда и только тогда, когда f является гармонической функцией.*
Y_t – субмартингал (супермартингал) тогда и только тогда, когда f является субгармонической (супергармонической) функцией.

3 Интегральное преобразование

3.1 Понятие интегрального преобразования. Основные результаты

Пусть Y – адаптированный и H – предсказуемый процессы. Обозначим $\triangle Y_t = Y_t - Y_{t-1}$. Мы всегда будем рассматривать разность назад, чтобы не выходить из класса адаптированных процессов. Построим теперь **интегральное преобразование** $X = H \circ Y$ следующим образом:

$$X_t = H_0 Y_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle Y_s,\ t = 0, 1, \dots \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *1) Если Y – обобщенный мартингал и H – предсказуемый процесс, то $X = H \circ Y$ будет обобщенным мартингалом.*

2) Если Y – мартингал и H – предсказуемый ограниченный процесс, то $X = H \circ Y$ – мартингал.

Доказательство. 1) Легко видеть, что X – будет адаптированным. Рассмотрим

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}(X_{t-1} + H_t \triangle Y_t) = X_{t-1} + H_t\, \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \triangle Y_t = X_{t-1}.$$

Следовательно, мартингальное свойство для X выполнено.

2) Достаточно показать, что $X \in L_1(\mathsf{P})$.

$$\|X_t\|_1 \leqslant \|H_0\|_\infty \cdot \|Y_0\|_1 + \sum_{s=1}^{t} \|H_s\|_\infty \cdot \|Y_s\|_1 < \infty.$$

$\square$

Замечание 3.1. *Требование существенной ограниченности H практически нельзя ослабить, так как сопряженным к $L_1(\mathsf{P})$ является пространство $L_\infty(Prob)$.*

Теорема 3.1. *Процесс X является обобщенныйм мартингалом тогда и только тогда, когда $\exists$ мартингал Y и предсказуемый процесс H такие, что $X = H \circ Y$.*

Доказательство. **Необходимость.** Необходимость уже доказана (см. лемму 3.1).

Достаточность. 1) Положим $H_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle X_t|$. H_t ограничен п.н., т.к. X_t – мартингал $\Leftrightarrow \triangle X_t$ – мартингал разности $\Rightarrow \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \triangle X_t = 0 \Rightarrow \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle X_t| < \infty$.
По построению H_t является предсказуемым.
Обозначим $a^{\oplus} = \begin{cases} a^{-1}, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$. Ясно, что $a^{\oplus} a = 1_{\{a \neq 0\}}$.

Положим $\triangle Y_t = H_t^{\oplus} \triangle X_t$, $t = 1, 2, \ldots$. Величины H_0 и Y_0 можно определить, например, так: $H_0 = 1$, $Y_0 = X_0$.

Рассмотрим теперь $H_t \triangle Y_t$.

$$H_t \triangle Y_t = H_t H_t^{\oplus} \triangle X_t = 1_{\{H_t \neq 0\}} \triangle X_t.$$

Легко видеть, что $\triangle Y_t$ – обобщенный мартингал разности. Покажем, что $\triangle Y_t$ – мартингал, т.е. необходимо показать, что $\triangle Y_t \in L_1(\mathsf{P})$.

$$\mathsf{E}\, |\triangle Y_t| = \mathsf{E}\, |H_t^{\oplus}| \cdot |\triangle X_t| = \mathsf{E}\, \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |H_t^{\oplus}| \cdot |\triangle X_t| = \mathsf{E}\, |H_t^{\oplus}| \cdot \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle X_t| =$$
$$\mathsf{E}\, |H_t^{\oplus}| \cdot |H_t| = \mathsf{E}\, 1\{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle X_t| \neq 0\} \leqslant 1.$$

2) Покажем, что $H_t \triangle Y_t = \triangle X_t$ п.н. Это вытекает из леммы 3.2.

□

Определение 3.1. *Событие A выполнено на B п.н., если $\mathsf{P}(B \setminus A) = 0$.*

Лемма 3.2. *Пусть $X \geqslant 0$, $B = \{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} X = 0\}$. Тогда $X = 0$ п.н. на B.*

Упражнение 3.1. *Доказать лемму 3.2*

3.2 Игровой смысл мартингала

Мартингал разности $\triangle Y_t$ можно интерпретировать как выигрыш игрока на t-ом шаге игры при единичной ставке. Пусть X_t – капитал игрока к моменту времени t. Тогда $X_t = X_{t-1} + H_t \triangle Y_t$, где H_t имеет смысл ставки игрока на шаге t. H_t – предсказуемо, т.е. ставка игрока на шаге t зависит только от первых $t-1$ шагов игры. Пусть X_0 – начальный капитал игрока. Тогда процесс капитала игрока вычисляется как $X = H \circ Y$.

Если рассматривать только ограниченные стратегии (что имеет ясный практический смысл), то за конечное время в среднем выиграть в такой игре нельзя. Обратно, если на процессе Y_t нельзя выиграть в среднем, то это мартингал.

Формализуем все вышесказанное в следующей теореме:

Теорема 3.2. *Пусть $X = H \circ Y$. Тогда $\mathsf{E}\, X_T = \mathsf{E}\, X_0$ $\forall H$ – предсказуемой ограниченной тогда и только тогда, когда Y – мартингал.*

Доказательство. Необходимость тривиальна. Докажем достаточность. Зафиксируем произвольное $j \in [0, T]$. Положим $H_i = 0$, для $i \neq j$. Отсюда получаем: $X_T = (H \circ Y)_T = H_j \triangle Y_j$ для $j = 1, \ldots, T$, $X_T = (H \circ Y)_T = H_0 Y_0$ для $j = 0$.

$$\mathsf{E}\, X_T = \mathsf{E}\, H_j \triangle Y_j = \mathsf{E}\, \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} H_j \triangle Y_j = \mathsf{E}\, H_j\, \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} \triangle Y_j = 0,$$

следовательно, $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} \triangle Y_j = 0$, т.к. H_j – произвольное, значит $\triangle Y_j$ – обобщенный мартингал разности. □

Лемма 3.3. *1) Если X_t – обобщенный мартингал, φ – выпуклая функция такая, что $X_t \in \operatorname{dom} \varphi$ п.н. Тогда $Y_t = \varphi(X_t)$ – обобщенный субмартингал.*

2) *Если X_t – обобщенный субмартингал, φ – выпуклая, монотонно неубывающая, $X_t \in \operatorname{dom}\varphi$ п.н. Тогда $Y_n = \varphi(X_t)$ – обобщенный субмартингал.*

Упражнение 3.2. *Доказать неравенство Йенсена для условного мат.ожидания:* $\mathsf{E}^{\mathcal{A}} f(\xi) \geqslant f(\mathsf{E}^{\mathcal{A}} \xi)$.

Доказательство. Доказательство опирается на предыдущее упражнение.

1) $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \varphi(X_t) \geqslant \varphi(\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t) = \varphi(X_{t-1}) = Y_{t-1}$.

2) $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \varphi(X_t) \geqslant \varphi(\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t)$. В силу того, что X – субмартингал, и φ – монотонна, продолжим цепочку неравенств. $\varphi(\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t) \geqslant \varphi(X_{t-1}) = Y_{t-1}$.

□

4 Разложение Дуба

Пусть нам дано вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$. $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ — прогнозируемый процесс, адаптированный к фильтрации $\mathbb{F}$. Для процесса X справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.1. *Если X — прогнозируемый процесс, то его можно представить в виде:*

$$X_t = M_t + A_t, \tag{4.1}$$

где $M = \{M_t, t \geqslant 0\}$ — обобщенный мартингал, $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$ — предсказуемая последовательность, причём это разложение единственно с точностью до выбора M_0.

Доказательство. Возьмём произвольную $\mathcal{F}_0$-измеримую случайную величину M_0, и определим процесс M следующим образом:

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \Big(X_s - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} X_s \Big), \quad t \geqslant 1.$$

Это определение корректно, так как $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t$ определено и конечно в силу прогнозируемости X. Покажем, что для процесса M выполнено мартингальное свойство:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} M_{t+1} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} \Big(M_t + X_{t+1} - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} \Big) =$$

$$= M_t + \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} = M_t, \quad t \geqslant 0.$$

Таким образом, M – обобщенный мартингал. Определим теперь процесс A:

$$A_t = X_t - M_t, \quad t \geqslant 0$$

Убедимся в том, что процесс A является предсказуемым. A_t можно представить в виде:

$$A_t = A_{t-1} + \triangle A_t$$

Так как A_{t-1} — $\mathcal{F}_{t-1}$-измерима, то для предсказуемости A достаточно доказать, что $\triangle A_t$ является $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримой.

$$\triangle A_t = A_t - A_{t-1} = \triangle X_t - \triangle M_t = X_t - X_{t-1} - \Big(X_t - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t \Big) =$$
$$= \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t - X_{t-1}.$$

Так как $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t$ и X_{t-1} — $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримые величины, следовательно, $\triangle A_t$ является $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримой.

Таким образом, мы построили два случайных процесса:

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \Big(X_s - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} X_s \Big), \quad t \geqslant 1$$

$$A_t = A_0 + \sum_{s=1}^{t} \Big(\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} X_s - X_{s-1} \Big), \quad t \geqslant 1$$

$$M_0 + A_0 = X_0,$$

таких, что M — обобщенный мартингал, A — предсказуемая последовательность, и выполнено равенство (4.1).

Докажем теперь, что такое разложение единственно с точностью до выбора множества M_0. Допустим, существует два различных разложения:

$$X_t = M_t + A_t, \quad \text{и} \quad X_t = M_t' + A_t',$$

таких, что $M_0 = M_0'$. Взяв разность этих двух равенств, придём к следующему соотношению:

$$M_t' - M_t = A_t - A_t', \quad t \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Так как A — предсказуемый процесс, то A_t измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{t-1}$, поэтому, применив к обеим частям равенства (4.2) оператор $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}$ и воспользовавшись тем, что для процессов M и M' выполнено мартингальное свойство, получим:

$$M_{t-1}' - M_{t-1} = A_t - A_t', \quad t \geqslant 1 \tag{4.3}$$

От равенств (4.2) и (4.3) можем перейти к рекуррентному соотношению:

$$M_t' - M_t = M_{t-1}' - M_{t-1}, \quad t \geqslant 1, \tag{4.4}$$

из которого, с учетом равенства M_0 и M_0', вытекает, что $M_t = M_t'$ для всех $t \geqslant 0$. А из соотношения (4.2) следует, что $A_t = A_t'$ для всех $t \geqslant 0$. □

Следствие 4.1. *Для того, чтобы прогнозируемый процесс X являлся обобщенным субмартингалом, необходимо и достаточно, чтобы последовательность A в разложении* (4.1) *была неубывающей.*

Доказательство. Пусть X является обобщенным субмартингалом, тогда имеет место следующее неравенство:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} \geqslant X_t, \quad t \geqslant 0.$$

Воспользуемся разложением (4.1):

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} (M_{t+1} + A_{t+1}) \geqslant M_t + A_t, \quad t \geqslant 0.$$

Так как M — обобщенный мартингал, а A — предсказуемая последовательность, можем записать:

$$M_t + A_{t+1} \geqslant M_t + A_t, \quad t \geqslant 0,$$

откуда следует, что последовательность A неубывающая.

В другую сторону, если A — неубывающая последовательность, то справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} (M_{t+1} + A_{t+1}) = M_t + A_{t+1} \geqslant M_t + A_t = X_t,$$

то есть X — обобщенный субмартингал. Следствие доказано. □

Замечание 4.1. *Если X — обычный субмартингал, тогда, выбирая начальный элемент M_0 из множества $L_1(\mathsf{P})$, получим, что все элементы M_t лежат в этом множестве, то есть последовательность M будет мартингалом.*

Доказательство. Действительно, при доказательстве теоремы Дуба мы получили рекуррентное соотношение для величин M_t:

$$M_{t+1} = M_t + X_{t+1} - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1}, \quad t \geqslant 0.$$

Воспользовавшись субмартингальным свойством процесса X можем записать:

$$M_{t+1} \leqslant M_t + X_{t+1} - X_t, \quad t \geqslant 0.$$

Из этого соотношения следует, что, если $\mathsf{E}|M_0| < \infty$, то аналогичное неравенство выполнено для всех других элементов последовательности M, так как:

$$\mathsf{E}|M_{t+1}| \leqslant \mathsf{E}|M_t + X_{t+1} - X_t| \leqslant \mathsf{E}|M_t| + \mathsf{E}|X_{t+1}| + \mathsf{E}|X_t| < \infty$$

Таким образом, M будет мартингалом. □

5 Оболочка Снэлла

Пусть задано вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ и адаптированная последовательность $\xi = \{\xi_t, t \geqslant 0\}$.

Определение 5.1. ***Оболочкой Снэлла (или пакетом Снэлла)*** *случайной последовательности ξ будем называть наименьший обобщенный супермартингал ξ^*, мажорирующий процесс ξ, т.е*

$$\xi_t^* \geqslant \xi_t, \quad t \geqslant 0$$

Нас будет интересовать лишь случай дискретного времени с ограниченным горизонтом, то есть $t = 0, 1, \ldots, T$. При этом мы покажем, что для любого адаптированного вполне прогнозируемого процесса ξ существует оболочка Снэлла ξ^*, и выведем для неё явные формулы.

Теорема 5.1. *В случае дискретного времени с конечным горизонтом для любого адаптированного вполне прогнозируемого процесса ξ существует оболочка Снэлла ξ^*, причём справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\begin{cases} \xi_T^* = \xi_T, \\ \xi_{t-1}^* = \xi_{t-1} \vee \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi_t^*, \quad t = 1, \ldots, T \end{cases} \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть ξ^* случайный процесс, построенный по формулам (5.1). Сразу отметим, что такое построение корректно, так как в силу вполне прогнозируемости ξ условное математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi_t^*$ определено и конечно для всех допустимых t. Из формул (5.1) сразу следует, что

$$\xi_t^* \geqslant \xi_t \quad \text{и} \quad \xi_{t-1}^* \geqslant \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi_t^*, \quad t = 1, \ldots, T,$$

а это значит, что ξ^* обобщенный супермартингал, мажорирующий ξ. Покажем, что ξ^* является наименьшим таким супермартингалом. Пусть η любой другой обобщенный супермартингал, мажорирующий ξ. По индукции докажем, что $\eta \geqslant \xi^*$. В случае $t = T$ имеем:

$$\eta_T \geqslant \xi_T = \xi_T^*,$$

Допустим, неравенство $\eta_t \geqslant \xi_t^*$ выполнено для всех $t = s, \dots, T$. Докажем, что оно верно и для $t = s-1$. Запишем формулу (5.1) для случайной величины ξ_{s-1}^*:

$$\xi_{s-1}^* = \xi_{s-1} \vee \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} \xi_s^*$$

Так как η мажорирует ξ, то $\xi_{s-1} \leqslant \eta_{s-1}$. По предположению индукции $\xi_s^* \leqslant \eta_s$, следовательно, в силу монотонности оператора условного математического ожидания $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} \xi_s^* \leqslant \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} \eta_s$. Воспользуемся теперь тем, что η супермартингал, поэтому $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} \eta_s \leqslant \eta_{s-1}$. С учётом всего выше сказанного, можем записать:

$$\xi_{s-1}^* = \xi_{s-1} \vee \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} \xi_s^* \leqslant \eta_{s-1}$$

Таким образом, мы доказали, что любой обобщенный супермартингал, мажорирующий ξ, одновременно мажорирует и ξ^*, следовательно ξ^* является оболочкой Снэлла для процесса ξ. □

Замечание 5.1. *По индукции легко устанавливается, что если $\xi \in L_1(\mathsf{P})$, то $\xi^* \in L_1(\mathsf{P})$.*

6 Моменты остановки и сохранение мартингального свойства

6.1 Моменты остановки и марковские моменты

Определение 6.1. *Случайная величина τ, принимающая значения во множестве $\{0, 1, \dots, +\infty\}$, называется **марковским моментом**, если*

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t = 0, 1, \dots \tag{6.1}$$

Используя интерпретацию σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ как информацию, доступную нам в момент времени t, соотношение (6.1) можно трактовать следующим образом: в каждый момент времени t мы можем сказать наступил ли марковский момент или нет.

Непосредственно из определения марковского момента вытекает следующее утверждение:

Лемма 6.1. *Случайная величина τ является марковским моментом тогда и только тогда, когда случайный процесс $\eta = \{1_{\{\tau \leqslant t\}},\ t = 0, 1, \dots\}$ является адаптированным к потоку σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \dots\}$*

Определение 6.2. *Марковский момент называется **моментом остановки**, если он п.н. конечен, т.е $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$.*

Рассмотрим адаптированную последовательность X_t, и для нее определим момент τ_A первого достижения множества A, как $\tau_A = \inf\{t : X_t \in A\}$. При этом мы используем соглашение, что $\inf \varnothing = \infty$.

Упражнение 6.1. *Показать, что τ_A - марковский момент.*

Для произвольного момента остановки τ определим σ-алгебру событий, которые мы можем наблюдать до случайного момента времени τ.

Определение 6.3. $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geqslant 0\}$.

Корректность определения вытекает из следующего упражнения:

Упражнение 6.2. *Доказать, что $\mathcal{F}_\tau$ является σ-алгеброй.*

Некоторые простейшие свойства $\mathcal{F}_\tau$ объединим в следующее упражнение:

Упражнение 6.3. *1. Доказать, что если $\tau_1 \leqslant \tau_2$, то $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

2. Критерий измеримости случайной величины относительно $\mathcal{F}_\tau$: случайная величина ξ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$ тогда и только тогда, когда $\xi 1_{\{\tau \leqslant n\}}$ измерима относительно $\mathcal{F}_n$ для всех n.

3. Если τ_1 и τ_2 – марковские моменты остановки, то $\tau_1 \wedge \tau_2$ также будет являться моментом остановки.

Пусть X - адаптированный процесс, τ - момент остановки. Введем понятие остановленного процесса.

Определение 6.4. ***Остановленным*** *в момент времени τ процессом мы будем называть процесс X^τ такой, что $X^\tau_t = X_{\tau \wedge t}$ $\forall t \geqslant 0$.*

Можно представлять себе остановленный процесс, следующим образом:

$$X_\tau = \{X_1, X_2, X_3, ..., X_{\tau-1}, X_\tau, X_\tau, ...\}.$$

Если σ – момент остановки, тогда справедлива следующая формула:

$$X^\sigma_\sigma = X_0 + \sum_{s=1}^{\sigma} \triangle X_s = X_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \triangle X_s 1_{\{\sigma \geqslant s\}}.$$

Нетрудно видеть, что ее можно несколько обобщить для случая произвольного t:

$$X^\sigma_t = X_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \triangle X_s 1_{\{\sigma \wedge t \geqslant s\}}.$$

Если рассмотреть предсказуемый процесс $H_s = 1_{\{\tau \geqslant s\}}$, то можно придать этой сумме более простой вид:

$$X^\sigma = X_0 + H \circ X.$$

Из такого представления остановленного процесса сразу вытекает теорема:

Теорема 6.1. *Пусть τ – момент остановки, и X -мартингал (субмартингал, супермартингал, обобщенный мартингал), тогда остановленный процесс X_τ также является мартингалом (соответственно субмартингалом, супермартингалом, обобщенным мартингалом).*

Заключение 6.1. *Пусть τ – ограниченный момент остановки: $\tau \leqslant T$. Если X - мартингал, то $\mathsf{E}\, X_\tau = \mathsf{E}\, X_0$,*
если X - субмартингал, то $\mathsf{E}\, X_\tau \geqslant \mathsf{E}\, X_0$,
если X - супермартингал, то $\mathsf{E}\, X_\tau \leqslant \mathsf{E}\, X_0$.

Вообще говоря, для неограниченных моментов остановки такое утверждение неверно.

Лемма 6.2. *Пусть $Y \geqslant 0$ – неотрицательная случайная величина, τ - момент остановки. Тогда*

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y = \sum_t \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} Y 1_{\{\tau = t\}},$$

или, если обозначить $\xi_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} Y$, то $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y = \xi_\tau$.

Доказательство. 1. Так как ξ_t - адаптирована, то ξ_τ - измерима относительно F_τ.

2. Для любого A из $\mathcal{F}_\tau$ верна следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{E}\,\xi_\tau 1_A = \mathsf{E}\sum_t 1_A 1_{\tau=t}\xi_t = \mathsf{E}\sum_t 1_{A\cap\{\tau=t\}}\xi_t = \sum_t \mathsf{E}\,1_{A\cap\{\tau=t\}}\,\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} Y =$$
$$= \sum_t \mathsf{E}\,\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} 1_{A\cap\{\tau=t\}} Y = \mathsf{E}\sum_t 1_{A\cap\{\tau=t\}} Y = \mathsf{E}\,1_A Y$$

□

Лемма 6.3. *Пусть Y – неотрицательный супермартингал: $Y \geqslant 0$. Определим марковский момент $\tau = \inf\{t : Y_t = 0\}$ – момент первого достижения нуля процессом Y. Тогда на множестве $\{\tau < \infty\}$ почти наверное выполняется*

$$Y_\tau = Y_{\tau+1} = ... = 0.$$

Доказательство. Для произвольного $k > 0$ рассмотрим неотрицательную случайную величину $\eta = Y_{\tau+k} - Y_\tau = Y_{\tau+k} \geqslant 0$.

$$\mathsf{E}(Y_{\tau+k} - Y_\tau)1_{\{\tau<\infty\}} = \sum_t \mathsf{E}(Y_{t+k} - Y_t)1_{\{\tau=t\}} \leqslant 0.$$

Таким образом, поскольку случайная величина $(Y_{\tau+k} - Y_\tau)1_{\{\tau<\infty\}}$ неотрицательна, и ее среднее равно нулю, то $(Y_{\tau+k} - Y_\tau)1_{\{\tau<\infty\}} = 0$ почти наверное. □

Упражнение 6.4. *Пусть $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant N$ – два ограниченных момента остановки. Доказать, что если X – мартингал, то $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{\tau_1}} X_{\tau_2} = X_{\tau_1}$.*

Рассмотрим адаптированный процесс X. Через $\nu_t^X[a,b]$ обозначим случайную величину – число пересечений этим процессом интервала $[a,b]$ до момента времени t снизу вверх.

Утверждение 6.1 (Неравенство Дуба). *Для субмартингала X_t справедлива следующая оценка $\nu_t^X[a,b]$:*

$$\mathsf{E}\,\nu_t^X[a,b] \leqslant \frac{\mathsf{E}(X_t - a)_+}{b-a}.$$

Рассмотрим субмартингал $X_t \in \mathcal{L}_1$ такой, что $\mathsf{E}\,X_t^+ \leqslant C < \infty$. Поскольку X_t^+ – неотрицательный субмартингал, то $\mathsf{E}\,X_t^+ \uparrow D < \infty$. Также нетрудно заметить, что $\mathsf{E}\,X_t \uparrow d < \infty$.

Замечание 6.1. *Можно получить оценку сверху и для $|X|$:*

$$\begin{cases} X = X^+ - X^- \\ |X| = X^+ + X^- \end{cases} \Rightarrow |X| = 2X^+ - X \Rightarrow$$

Из субмартингальности X заключаем, что

$$\mathsf{E}\,|X_n| \leqslant 2C - \mathsf{E}\,X_n \leqslant 2C - \mathsf{E}\,X_0 = C^*.$$

Теорема 6.2 (о сходимости). *Пусть X_t – субмартингал из $\mathcal{L}_1$ и $\mathsf{E}\,X_t^+ \leqslant C$. Тогда*

1. $X_t \xrightarrow{п.н.} X_\infty$,

2. $E|X_\infty| < \infty$.

Доказательство. Применяя неравенство Дуба, получим:

$$\mathsf{E}\,\nu_t^X[a,b] \leqslant \frac{E(X_t-a)^+}{(b-a)} \leqslant \frac{C}{b-a}.$$

Из леммы Беппо Леви следует, что $\mathsf{E}\,\nu_t^X[a,b] \uparrow \mathsf{E}\,\nu_\infty^X[a,b]$, и $\mathsf{E}\,\nu_\infty^X[a,b] \leqslant \frac{C}{b-a}$. Отсюда вытекает, что $\nu_\infty^X[a,b]$ конечно с вероятностью 1. Для счетного числа произвольных интервалов с вероятностью 1 число пересечений всех интервалов конечно. Поскольку число всевозможных интервалов с рациональными концами счетно, то почти наверное X пересекает каждый из них конечное число раз.

Доказательство проведем от противного. Допустим, последовательность X_t не сходится, то есть $\limsup_t X_t > \liminf_t X_t$ с положительной вероятностью. Найдутся рациональные a и b, для которых

$$\mathsf{P}\{\limsup_t X_t > b > a > \liminf_t X_t\},$$

следовательно, $\mathsf{P}\{\nu_\infty^X[a,b]=\infty\} > 0$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второго пункта воспользуемся следующей леммой:

Лемма 6.4 (Лемма Фату). *Пусть последовательность случайных величин ξ_t ограничена снизу: $\xi_t \geqslant \eta$, с $\mathsf{E}\,\eta > -\infty$. Тогда $\mathsf{E}\liminf_{t\to\infty}\xi_t \leqslant \liminf_{t\to\infty}\mathsf{E}\,\xi_t$.*

Доказанно, что $|X_t| \to |X_\infty|$.

$$\mathsf{E}\,|X_\infty| = \mathsf{E}\liminf_{n\to\infty}|X_n| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\mathsf{E}\,|X_n| \leqslant 2C - \lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\,X_n < \infty.$$

□

6.2 Сохранение мартингального свойства на бесконечности. Равномерная интегрируемость

Теорема 6.3. *Мартингал X_n сходится в $\mathcal{L}_1$ тогда и только тогда, когда он является равномерно интегрируемым мартингалом.*

Равномерно интегрируемые мартингалы и только они могут быть непрерывно (в смысле $\mathcal{L}_1$) доопределены на $t=\infty$ с сохранением мартингального свойства.

Теорема 6.4 (Поля Леви). *Если удалось присоединить точку X_∞ так, что $X_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty$ (мартингальное свойство выполнено), то X_t — равномерно интегрируем.*

Доказательство. (Критерий Вали-Пуссена).
Рассмотрим выпуклую, монотонно возрастающую положительную функцию φ такую, что $\frac{\varphi(x)}{x} \longrightarrow \infty$, при $x \longrightarrow \infty$ и $\mathsf{E}\,\varphi(Y) < \infty$. Положим $\xi_n = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_n} Y$. Используя неравенство Иенсена выписываем следующую цепочку неравенств:

$$\mathsf{E}\,\varphi(|\xi_n|) \leqslant \mathsf{E}\,\varphi(\mathsf{E}^{\mathcal{F}_n}|Y|) \leqslant \mathsf{E}\,\mathsf{E}^{\mathcal{F}_n}\varphi(|Y|) = \mathsf{E}\,\varphi(|Y|) < \infty.$$

Следовательно, семейство величин ξ_n равномерно интегрируемо, что и требовалось доказать. □

Упражнение 6.5. *Если присоединить к мартингалу X точку X_∞, измеримую относительно $\sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$, то будет выполнено $\lim X_t = X_\infty$.*

Упражнение 6.6. *Пусть* $X_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} X$, *и* $X' = \lim X_t$. *Доказать, что* $X' = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_\infty} X$.

Пример 6.1. *Рассмотрим такую игру. Производится серия розыгрышей случайной величины по схеме Бернулли. На каждом шаге игрок делает ставку. Если выпадает успех, то ему выплачивается сумма, равная ставке, если неудача – тогда он платит указанную сумму. Игрок имеет право продолжать игру неограниченное число шагов и может в любой момент покинуть игру. Тогда у такой игры существует выигрышная стратегия.*

Зададим случайную величину ξ_t *таким образом:*

$$\xi_t = \begin{cases} +1, & \text{если в } t\text{-ом испытании произошел успех,} \\ -1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть вероятность появления единицы равна $\mathsf{P}(\xi_t = 1) = p < 1$. *В качестве фильтрации* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \dots\}$ *возьмем каноническую:* $\mathcal{F}_0$ *– тривиальная,* $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1, \dots \xi_t)$. *Автоматически получаем, что* ξ *– адаптированная. Далее, под* H_t *будем понимать ставки, делаемые на* t*-ом шаге. В качестве* H_t *можно брать* $H_t = a^{t-1} H_0$, $a > 2$. *Заметим, что в этом случае* H *– предсказуемая. Введем случайную величину* $\tau = \inf\{t : \xi_t = 1\}$. *Нетрудно видеть, что* τ *является моментом остановки. Обозначим* $S_t = S_0 + \sum\limits_{s=1}^{t} \xi_s$, $\triangle S_t = \xi_t$ *(заметим, что при* $p = \frac{1}{2}$ S *является мартингалом, а* ξ *– мартингалом разности). Тогда, если определить случайный процесс* $V = H \circ S$, *то* V_t *имеет смысл выигрыша в момент времени* t. *Применим такую стратегию: на* $t-$ *шаге делаем ставку, равную* H_t, *а в момент* τ *забираем деньги и уходим. Посчитаем, сколько денег у нас будет в момент времени* τ *(пусть* $H_0 = 1$, $S_0 = 0$*):*

$$V_\tau = a^{\tau-1} - \sum_{k=1}^{\tau-1} a^{k-1} = a^{\tau-1} - \frac{a^{\tau-1} - 1}{a - 1}$$

Видим, что $V_\tau > 0$ *при* $a \geqslant 2$.

Заметим, что предположение, что ξ *– схема Бернулли пока нами не использовалось, достаточно было того, что* τ *– момент остановки, т.е.* $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$.

Теперь предположим, что $a = 2$, $p = \frac{1}{2}$. $H_t = 2^{t-1}$ *– предсказуемая и ограниченная. Тогда получаем, что* V *– мартингал. Остановим* V *в момент* τ*:* $V_t^\tau = V_{\tau \wedge t}$.

$$\triangle V_t^\tau = 1_{\{\tau \geqslant t\}} \triangle V_t = 1_{\{\tau \geqslant t\}} H_t \triangle S_t = H'_t \triangle S_t,$$

где $H'_t = 1_{\{\tau \geqslant t\}} H_t$ *– также предсказуемая, ограниченная. Нетрудно видеть, что если* τ *– момент остановки, то*

$$V_t^\tau = V_{\tau \wedge t} \xrightarrow[t \to \infty]{\text{п.н.}} V_\tau,$$

V_t^τ *принимает такие значения:*

$$V_t^{(\tau)} = V_{\tau \wedge t} = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geqslant \tau \text{ с вероятностью } 1 - 2^{-t} \\ -(2^t - 1), & \text{при } t < \tau \text{ с вероятностью } 2^{-t} \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\mathsf{E}\, V_t^\tau = 0$, *чего и следовало ожидать, т.к.* V_t^τ *– мартингал. В частности имеем:* $V_{\tau \wedge t} \leqslant V_\tau = 1$. *Разберемся со сходимостью в* L_1.

$$\|V_\tau - V_{\tau \wedge t}\|_{\mathcal{L}_1} = \mathsf{E}\,|V_\tau - V_{\tau \wedge t}| = \mathsf{E}(V_\tau - V_{\tau \wedge t}) = 1 - 0 = 1,$$

таким образом, получаем, что сходимости в $\mathcal{L}_1$ *нет:* $V_{\tau \wedge t} \underset{t \to \infty}{\overset{\mathcal{L}_1}{\not\to}} V_\tau$.

Замечание 6.2. *Пример (6.1) показывает, что мартингальное свойство может не сохранятся на бесконечности.*

Упражнение 6.7 (Критерий сходимости в $\mathcal{L}_1$). *Последовательность, сходящаяся почти наверное, сходится в $\mathcal{L}_1$ тогда и только тогда, когда она равномерно инегрируема.*

Упражнение 6.8. *Пусть $\xi_t \geqslant 0$, $\xi_t \to \xi$ (по вероятности или п.н.). Тогда условие $\mathsf{E}\,\xi_t \to \mathsf{E}\,\xi$ равносильно равномерной интегрируемости последовательности.*

Теорема 6.5. *Пусть X – субмартингал (мартингал), τ – момент остановки, τ' – марковский момент. Пусть выполнены два свойства:*

1. $\mathsf{E}\,|X_\tau| < \infty$,
2. $Y_t = 1_{\{\tau>t\}}X_t$ *– равномерно интегрируема.*

Тогда выполняется следующее:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{\tau'}}\,X_\tau \geqslant (=) X_{\tau'} \quad \text{на множестве } \{\tau \geqslant \tau'\}. \tag{6.2}$$

Если X – мартингал и выплнено свойство 1, тогда X сохраняет мартингальное свойство тогда и только тогда, когда выполнено свойство 2.

Доказательство. Заметим, что условие 2 в нашем случае равносильно сходимости: $\mathsf{E}\,1_{\{\tau>t\}}X_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (см. упражнения 6.7, 6.8).

Достаточно доказать теорему для случая $\tau' = \mathrm{const}$, т.к. справедливо: $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_\tau} = \sum\limits_{t=1}^{\infty} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_\tau}\,1_{\{\tau=t\}}$.
Т.о. покажем,

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_\tau \geqslant (=) X_t \ \text{ выполняется на множестве } \{\tau \geqslant t\}. \tag{6.3}$$

Заметим, что на множестве $\{\tau \leqslant t\}$ выполняется равенство: $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_\tau = X_\tau$. Тогда можем записать, что (6.3) равносильно (6.4):

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_\tau \geqslant (=) X_{\tau\wedge t}. \tag{6.4}$$

Справедливо следующее:

$$X_{\tau\wedge m} = 1_{\{\tau\leq m\}}X_\tau + 1_{\{\tau>m\}}X_m \underset{m\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\longrightarrow}} X_\tau,$$

(здесь мы обозначили $m = t + k,\ k \geqslant 0$). Выясним, когда $X_{\tau\wedge m}$ будет сходится в $\mathcal{L}_1$. Поскольку $1_{\{\tau\leqslant m\}}X_\tau$ – равномерно интегрируема, то $X_{\tau\wedge m}$ является равномерно интегрируемой тогда и только тогда, когда равномерно интегрируема последовательность $1_{\{\tau>m\}}X_m$, а это и есть условие 1 из формулировки теоремы. Поскольку $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_{\tau\wedge m} = X_{\tau\wedge t}$, то теорема доказана. □

7 Оптимальные моменты остановки

Рассмотрим последовательность ξ, заданную на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ и адаптированную к фильтрации $\mathbb{F}$. Пусть ξ задана на интервале $[S,T]$. Рассмотрим $\mathfrak{T}_{[S,T]}$ – множество всех моментов остановки, принимающий значения из интервала $[S,T]$.

Определение 7.1. τ^* *–* ***оптимальный момент остановки в классе*** $\mathfrak{T}_{[S,T]}$*, если $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_s}\,\xi_{\tau^*} \geqslant \mathsf{E}^{\mathcal{F}_s}\,\xi_\tau$ для любого $\tau \in \mathfrak{T}_{[S,T]}$.*

Теорема 7.1.

1. *Для оптимальности момента остановки $\tau^* \in \mathfrak{T}_{[S,T]}$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

   (a) *В момент τ^* процесс совпадает со своей оболочкой Снелла:*
   $\xi_{\tau*} = \xi^*_{\tau^*}$.

   (b) *Процесс $\xi^{*(\tau^*)}_t = \xi^*_{\tau^*\wedge t}$ (остановленная оболочка Снелла) является мартингалом.*

2. *Оптимальный момент существует и в качестве τ^* можно взять:*
   $\tau = \sigma_s = \inf\{t \in [S,T] : \xi_t = \xi^*_t\}$.

3. $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_{\tau^*} = \xi^*_S$ *(т.е. оболочка Снелла ξ^*_t является функцией цены!).*

Доказательство. Справедлива цепочка неравенств $\forall \tau \in \mathfrak{T}_{[S,T]}$:

$$\xi^*_S = \xi^*_{\tau\wedge S} \geqslant \{\xi^*\text{– супермартингал}\} \geqslant \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi^*_{\tau\wedge T} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi^*_\tau \geqslant \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_\tau. \tag{7.1}$$

Достаточность. Пусть τ удовлетворяет 1a)1b).

$$\xi^*_S = \xi^*_{\tau^*\wedge S} = \{\xi^{*(\tau)}\text{ – мартингал}\} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi^*_{\tau^*\wedge T} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi^*_{\tau^*} = \{\xi^*_{\tau^*} = \xi_{\tau^*}\} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_{\tau^*}$$

Значит, если такой τ^* существует, то он оптимальный. Заметим, что попутно мы доказали и пункт 3).

Докажем пункт 2). Покажем $\sigma_S = \inf\{t : \xi_t = \xi^*_t\}$ – оптимальный момент остановки. Первое условие выполняется автоматически: $\xi_{\sigma_S} = \xi^*_{\sigma_S}$. Покажем, что процесс $t \mapsto \xi^*_{\sigma_S\wedge t}$ является мартингалом.

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,\xi^*_{\sigma_S\wedge t} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,1_{\{\sigma_S\geqslant t\}}\xi^*_t + \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,1_{\{\sigma_S<t\}}\xi^*_{\sigma_S} = 1_{\{\sigma_S\geqslant t\}}\,\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,\xi^*_t + \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,1_{\{\sigma_S<t\}}\xi^*_{\sigma_S}.$$

На множестве $\{\sigma_S \geqslant t\}$ $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,\xi^*_t = \xi^*_{t-1}$. Это следует из следующего. Процесс ξ^* строится на основе реккурентного соотношения:

$$\xi^*_{t-1} = \xi_{t-1} \vee \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,\xi^*_t,$$

следовательно на множестве $\{\sigma_S \geqslant t\}$

$$\xi_0 < \xi^*_0, \dots, \xi_{t-1} < \xi^*_{t-1},$$

значит первое слагаемое равно $1_{\{\sigma_S\geqslant t\}}\xi^*_t$. Разберемся теперь со вторым слагаемым $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,1_{\{\sigma_S<t\}}\xi^*_{\sigma_S}$: $1_{\{\sigma_S<t\}}\xi^*_{\sigma_S}$ – измерима относительно $\mathcal{F}_{t-1}$, т.к. $1_{\{\sigma_S<t\}}\xi^*_{\sigma_S} = \sum\limits_{k=1}^{t-1} 1_{\{\sigma_S=k\}}\xi^*_k$, следовательно, второе слагаемое равно $1_{\{\sigma_S<t\}}\xi^*_{\sigma_S}$. Отсюда получаем, что

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,\xi^*_{\sigma_S\wedge t} = \xi^*_{\sigma_S\wedge(t-1)}.$$

Пункт 2) доказан.

Необходимость. Так как ξ^*_S – функция цены (т.е. $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_{\tau^*} = \xi^*_S$), и (7.1) выплняется для произвольного момента остановки $\tau \in \mathfrak{T}_{[S,T]}$, то для $\tau = \tau^*$ в (7.1) вместо неравенств будут равенства.

Упражнение 7.1. *Проверить, что из $\xi^*_{\tau\wedge S} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi^*_{\tau\wedge T}$ вытекает мартингальное свойство в любой момент времени.*

Докажем свойство 1a). $\xi^*_\tau - \xi_\tau \geqslant 0$, а $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_S}(\xi^*_\tau - \xi_\tau) = 0$, следовательно $\xi^*_\tau = \xi_\tau$. □

Рассмотрим разложенние супермартингала $\xi_t^* = M_t - B_t$, на разность мартингала M_t и предсказуемого возрастающего процесса B_t с $B_S = 0$. Определим следующий момент остановки: $\rho_S = \inf\{t \geqslant s : B_{t+1} > 0\}$. Здесь мы, как и всегда, пологаем $\inf \varnothing = T$.

Теперь покажем, что момент остановки ρ_S является максимальным среди всех оптимальных моментов остановки.

Для этого, во-первых, необходимо проверить, что процесс $t \mapsto \xi^*_{\rho_S \wedge t}$ является мартингалом. В самом деле, $\xi^*_{\rho_S \wedge t} = M_{\rho_S \wedge t}$, поскольку при $t \leqslant \rho_S$ процесс $B_t \equiv 0$. Справа стоит остановленный мартингал, который снова является мартингалом, и следовательно, $\xi^*_{\rho_S \wedge t}$ – мартингал.

На множестве $\rho_S = T$ по определению величины ξ^*_T, имеем $\xi^*_T = \xi_T$. На множестве $A_u = \{\rho_S = u\}$, с произвольным $u < T$, величина ξ^*_u определяется как $\xi^*_u = \xi_u \vee \mathsf{E}^{\mathcal{F}_u} \xi^*_{u+1}$.

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_u} \xi^*_{u+1} 1_{A_u} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_u} M_{u+1} 1_{A_u} - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_u} B_{u+1} 1_{A_u} = (M_u - B_{u+1}) 1_{A_u}.$$

Вспоминая, что $B_{u+1} > 0$ и $B_u = 0$ на множестве A_u и $\xi_u = M_u$ на этом же множестве наконец получим, что и $\xi^*_u 1_{A_u} = \xi_u 1_{A_u}$.

Поскольку $\xi^*_{\rho_S \wedge t}$ – мартингал и $\xi^*_u 1_{A_u} = \xi_u 1_{A_u}$ заключаем, что ρ_S – оптимальный момент остановки.

Осталось доказать, что этот момент остановки максимален в классе всех оптимальных моментов остановки. Пусть некоторый оптимальный момент τ не удовлетворяет условию $\tau \leqslant \rho_S$. Тогда на множестве $\tau > \rho$ по определению ρ_S почти всюду $B_\tau > 0$.

Упражнение 7.2. *Доказать, что если случайная величина $X \geqslant 0$ на множестве $\{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} X = 0\}$, то на этом множестве $X = 0$ п.н.*

Из этого упражнения вытекает, что $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_S} B_\tau > 0$ на множестве $\tau > \rho_S$. Используя это получим, что

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_S} \xi^*_\tau = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S} M_\tau - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S} B_\tau = M_S - \mathsf{E}^{\mathcal{F}_S} B_\tau$$

На множестве $A = \{\tau > \rho_S\}$ получаем, что $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_s} \xi^*_\tau 1_A < \xi^*_s 1_A$. Поэтому процесс $t \mapsto \xi^*_{\tau \wedge t}$ не может быть мартингалом и момент τ не является оптимальным. Мы доказали, что ρ_S – максимальный оптимальный момент остановки.

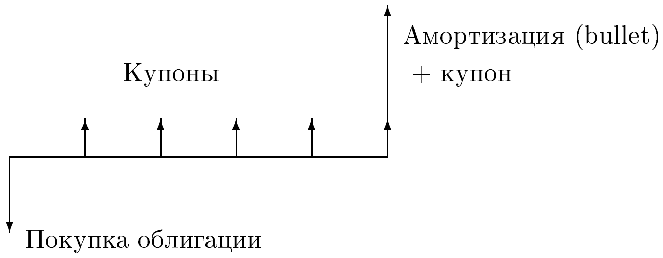

Рис. 1: Поток платежей по облигации с фиксированным доходом.

Часть II
Модели финансовых рынков с дискретным временем

1 Введение в финансовые рынки

1.1 Основные понятия

Под финансовым рынком будем понимать рынок финансовых инструментов (в т.ч. и акций). Рынок, на котором обращаются только акции, называется фондовым.

Акция (share, stock) – ценная бумага, дающая право начасть капиталла(собственности). В отличии от владельца акции, владелец **облигации** (bond) выступает не в качестве собственика, а в качестве кредитора.

Поток платежей по облигации с фиксированным доходом (fixed income) можно представить следующим образом (см. Рис. 1): после покупки облигации через определенные промежутки времени выплачиваются так называемые купоны, а в конечный момент производится выплата купона и амортизации (bullet). К преимуществам облигаций перед обычным кредитованием можно отнести ее ликвидность.

Но задолженность может быть устроена гораздо более сложным образом. В качестве премера можно привести задолженность РФ Лондонскому Клубу:
PRIN – основная задолженность, проценты по ней выплачиваются в ц.б. IAN. Деньгами же Россия платит только проценты по IAN, т.е. проценты по процентам.

Кроме вышеуказанных рынков, можно выделить также:

1) Рынок commodities (определение товарного рынка не совсем правильно – это рынки энергоносителей, металла, золота).

2) Валютый рынок (ForEx – Foreign Exchange). Валютный рынок является самым интенсивным рынком, ежедневный оборот средств составляет несколько сот миллиардов долларов.

Рынки делятся на организованные (биржевые) и неорганизованные (внебиржевые). Биржа созывается для регламентирования торговли и уменьшения кредитных рисков. Кроме того, биржа должна гарантировать исполнение контракта.

Приведем примеры финансовых инструментов, доступных на бирже.

Фьючерс (futures) – срочный контракт на бирже (на внебиржевом рынке такой контракт называется форвардом), обязывающий продавца фьючерса поставить (или приобрести), а покупателя – приобрести (или поставить) определенное количество основы (underline) через определенное время по определенной цене. Фьючерсы бывают индексные (расчетные) и поставочные. Поставочный контракт – по исполнении контракта продавец фьючерса обязан поставить определенное количество акции покупателю фьючерса. В случае индексного контракта между контрагентами производится денежный расчет исходя из цены underline, указанной в контракте и рыночной цены. Обычно до поставки доводится не более 1 %, все остальные контракты погашаются (т.е. если было 10 контрактов long, то покупается 10 контрактов short – это называется netting).

Контракт заключается на покупку или продажу основы (underline). В качестве underline можегут выступать не только активы (акции, облигации) но и, например, некоторые индексы: рейтинг кандидата на президентских выборах. Фондовый индекс – некоторый агрегированный показатель поведения рынка (акций) в целом. Рейтинговые агенства (например, S&P) кроме определения рейтингов, вычисляют также фондовые индексы (S&P100 – 100 крупнейших компаний, S&P – 500 крупнейших компаний). Фондовые индексы (Dow Jones, S&P и др.) сильно коррелированы. Также бывают фьючерсы на некоторые катастрофические события (например, произойдет землятресение, или нет). Т.о. underline – достаточно произвольная вещь.

Фьючерсы различаются по позиции: короткая (short – фьючерс на продажу) или длинная (long – фьючерс на покупку). Пример:
underline: акция IBM
позиция: long
количество: 1000 акций
период: 3 месяца

Вид диаграммы прибыли/убытки для фьючерсов (форвардов) показан на рисунке 2. Заметим, что в короткой позиции проигрыш неограничен.

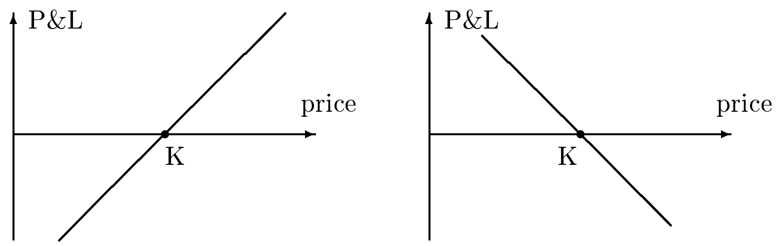

Рис. 2: Диаграмма P&L для фьючерсов (длинная и короткая позиция) с ценой исполнения K.

Как же биржа гарантирует исполнение контрактов? Для этого существует понятие **маржи** (margin). Маржа – это гарантийный взнос агента биржы. Маржа вносится на так называемый **маржинальный счет**. На бирже перерасчет маржи производится каждый день исходя из текущей ситуации на рынке и портфеля агента. Если на маржинальном счете находится сумма, меньшая maintance margin, происходит margin call – требование довнесения на маржинальный счет (требование поддержать маржинальный счет). Вариационная маржа – то, что довносится. Надо отметить, что на биржах эта методика очень хорошо отработана. Биржа таким образом минимизирует риск контрагента.

Крупному агенту может быть выгодно работать на внебиржевом рынке, заключая форвардные контракты.

Сформулируем теперь, что такое **производные финансовые инструменты** (деривативы, derivatives).

Производные финансовые инструменты (производные по отношению к основе) – срочные финансовые инструменты – контракты на поставку (или выплату) underline, связанные с некоторыми условиями контракта и, вообще говоря, с историей котировок. Производные финансовые инструменты разделяются на поставочные и расчетные. Пример производных финансовых инструментов – фьючерсы и опционы.

Рассмотрим подробнее виды опционов.

Опционы

Во-первых, опционы различают по виду сделки: бывают оционы типа call (на покупку) и опционы типа put (на продажу). Опцион call дает **право** (но не обязанность) на покупку основы. Опцион put дает право на приобретение основы. Надписатель опциона (writer) – тот, кто отвечает по опциону (надписатель – не обязательно продавец!).

Опционы разделяют на стандартные (европейского и американского типов) и экзотические (все остальные). Надо отметить, что название экзотических такие опционы носят не за счет того, что их трудно встретить, а из-за того, что они не являются стандартными.

1) **Опционы европейского типа** – опционы, выплаты по которым осуществляются в некоторый фиксированный (терминальный) момент времени по фиксированной (указанной в контракте) цене исполнения (striking price). Диаграмма функции выплат P&L (Profit and Loss – диаграмма прибыль/убытки) по опциону call имеет следующий вид (см. Рис. 3). Таким образом, за опцион платим деньги вперед, за это

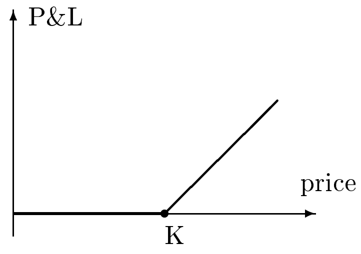

Рис. 3: Диаграмма P&L для опциона call европейского типа с ценой исполнения K.

   получаем обусловленный платеж в будущем.

2) **Опционы американского типа** – опционы, выплаты по которым могут быть произведены в любой момент времении действия контракта, время выбирает владелец опциона.

3) **Экзотические опционы**. Среди экзотических опционов можно повстречать, например, такие: опцион lookback (право на покупку за наилучшую цену за время действия контракта), бермудский опцион (выплаты в несколько фиксированных моментов времени), русский опцион, барьерные, азиатские (право на покупку по средней цене), опцион chooser.

Можно повстречать различные 'накрученные' конструкции, например, опцион американского типа на фьючерс на индекс.

В связи с этим сразу возникают два нетривиальных вопроса:

1) как определить премию опциона;

2) если взяли обусловленное обязательство, то как себя вести на рынке, чтобы не остаться в проигрыше (тот, кто берет обязательство, находится в более рискованной позиции, чем его контрагент, т.к. его потери неограничены, а значит, он должен хэджироваться – to hedge).

Хеджирование позиций

Под **хэджированием** понимается защита от рисков путем проведения операций на рынке.

Пример. Фьючерсная цена является некоторым прогнозом рынка вперед. Если защищаем по underline длинную позицию, то покупаем короткий фьючерс.

Еще один пример. Если через 6 мес. надо заплатить банку деньги в DM, а мы не хотим подвергаться валютному риску, то покупаем опцион call. Такое хеджирование называется одноразовым. Бывает также динамическое хэджирование (программная торговля).

Кто же такие хэджер и спекулянт (заметим, что это стиль поведения в данный момент времени, а не постоянная характеристика какого-то участника рынка). Вообще редко встречаются чистые хэджеры и спекулянты (т.е. по разным рискам разные позиции, но и по одному риску позиция может менятся во времени).

Итак,
хеджер – такой участник рынка, целью которого является защита от некоторых рисков путем проведения опреаций на рынке.
спекулянт – тот участник рынка, который готов принять на себя риск, исходя и своих ожиданий движения рынка.

Самый простой вид спекулянтов – "быки"и "медведи". "Быки"исходят из ожидания повышения котировок, "медведи"играют на понижение.

Волатильность (изменчивость, volatility) – некая числовая характеристика изменчивости рынки (амплитуды колебаний).

Если некто ожидает увеличение волатильности, он может, используя некоторые опционные стратегии, заработать деньги (кстати, тогда он также будет спекулянтом).

Рассмотрим такой пример. Стратегия buy&hold (купил и держи акции IBM) – спекулятивная позиция (т.к. придерживаясь этой стратегии, строим свои действия на своих ожиданиях).

Вопрос:

1) Могут ли быть на рынке одни спекулянты? (Да, у всех свои ожидания).

2) Могут ли быть на рынке одни хеджеры? (Нет, хэджеры передают риск, а кому – спекулянту!)

Хорошо известным фактом является то, что спекулянты влияют на ликвидность.

Кроме хеджеров и спекулянтов можно еще встретить так называемых liquidity motivated traiders – трейдеров, целью которых является управление ликвидностью (обеспечение привлечения и размещения средств).

1.2 Информационная эффективность рынка

Рынок является информационно однородным, если участники рынка имеют доступ к одной и той же информации. Но в реальности информационно однородные рынки найти трудно (например, на валютном рынке используются достаточно дорогие информационные системы, такие как Routers2002). Кроме того на рынке могут быть субъекты, владеющие инсайдеровской информацией (insiders). На развитых рынках инсайдеровской информацией пользоваться нелегально.

Введем теперь общепринятую классификацию степеней информированности участника рынка:

1. слабая (weak),
2. средняя (semistrong),
3. сильная (strong).

Раскроем эти понятия:

1. слабая информированность – имеется в виду, что участник рынка опирается только на информацию о ценах и (если она доступна) на информацию о объемах сделок.
2. средняя – информация о ценах плюс общественно доступная информация.
3. сильная – информация о ценах плюс общественно доступная информация плюс инсайдеровская информация (т.е. некоторая закрытая, внутренняя информация).

В качестве примера использования инсайдеровской информации можно привести следующую ситуацию. Высокопоставленный сотрудник некоторой компании звонит знакомому трейдеру и сообщает ему, что на следующий день будут опубликованы не слишком успешные годовые отчеты этой компании. Естественно в такой ситуации предположить, что назавтра цены акций этой компании упадут в цене, а значит есть возможность 'спекульнуть' (коротко продать акции этой компании).

На основе данной классификации вводится понятие уровней информационной эффективности рынка:

1. слабая (weak) информационная эффективность,
2. средняя (semistrong) информационная эффективность,
3. сильная (strong) информационная эффективность.

Информационная эффективность соответствующего уровня означает, что являясь трейдером данного уровня информированности, мы не можем выиграть на данном рынке.

Предположение о слабой эффективности рынка близко к предположению о независимости приращений цен, но это не одно и то же.

Гипотеза о слабой эффективности рынка часто применима, например, когда оператор на рынке действует достаточно редко. Но если рассмотреть валютный рынок на уровне тика, то слабой эффективности уже не будет (тик – минимальный период изменения биржевой цены).

Предположение о среденей информационной эффективности можно поставить под большой вопрос. Сильная информационная эффективность в подавляющем большинстве случаев является заведомо неприемлемым предположением.

На рынке обычно есть лидеры (smartmoney). Некоторые следят за лидерами и действуют как они.

В книге Шираяева [1] определение слабой эффективности формулизуется через предположение о мартингальности процесса цен (иногда независимость приращений). Но это верно не на 100%, и вот почему: процесс цен может быть процессом с независимыми приращениями, а волатильность можно прогнозировать, следовательно можно выиграть.

1.3 Арбитраж

Определение 1.1. ***Арбитраж***

1. *– получение денег без начального капитала без риска.*

2. *(см. [3]) – присутствие на рынке возможности проведения ряда операций в результате которых получается безрисковая прибыль.*

Отсутствие арбитража в англоязычной литературе на жаргоне иногда называют no freelunch (отсутствие бесплатного завтрака).

Простейшим примером арбитража является географический арбитраж, т.е. в одном месте можно нечто купить дешевле и продать дороже в другом (конечно, необходимо учитывать издержки).

Определение 2 не учитывает влияния агентов рынка на цены, поэтому безрисковое получение премии реально невозможно, поскольку рынок реагирует на изменение цен быстрее, чем мы можем среагировать.

Предположение об **отсутствии арбитражных возможностей** – центральный принцип в финансовой инженерии. Это предположение часто эквивалентно равновесию рынка. По логике, из информационной эффективности должно следовать отсутствие арбитражных возможностей.

2 Задача ценообразования и хеджирования: основные предположения и формализация

2.1 Основные предположения о моделях

В данной части курса мы будем рассматривать задачу ценообразования и хеджирования. Наряду с этой задачей рассматривается также задача оптимального инвестирования. Однако результаты последней задачи носят скорее качественный, чем практический характер. Задача ценообразования и хеджирования более привязаны к практике. Модель, которую мы будем рассматривать, пологаем удовлетворяющей следующим ограничениям:

- Предполагается отсутствие арбитражных возможностей.

- Рассматривается рынок, состоящий из $d+1$ актива. Активы предполагаются торгуемыми(marketable). Цены на активы представляют собой векторнозначный процесс $X_t = (X_t^0, X_t^1, \dots, X_t^d), \quad t = 0, 1, 2, \dots$. В модели пренебрегается разницей между ценами покупки и продажи (т.е. ask=bid), и все цены являются доступными.

- Предполагается наличие безрискового актива. В дальнейшем будем обозначать его под номером 0. Хотя и не стоит понимать безрисковость буквально, такой актив можно создать синтетически. Например, можно рассмотреть казначейские бумаги США со сроком погашения 1 день.

- Описание доступной информации, используемой при принятии решений, будет представлять собой поток σ-алгебр (фильтрация):

  $$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t = 0, 1, ...).$$

  Разумеется, что $\mathcal{F}_t$ – неубывают. Процесс цен $(X_t)_{t\geqslant 0}$ является адаптированным к $\mathbb{F}$, т.е. X_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$.

- Предполагается наличие временного лага, равного единице, между получением информации и финансовой операцией (иными словами, мы не можем мгновенно реагировать на поступающую информацию).

- Обозначим через H_i^t - количество i-ого актива в портфеле в момент времени t. Процесс $H_t = (H_t^0, \dots, H_t^d), t = 0, 1, \dots$ является предсказуемым относительно $\mathbb{F}$ и называется **стратегией**. Предсказуемость H формализует предположение о наличии временного лага, равного единице, между получением информации и финансовой операцией (иными словами, мы не можем мгновенно реагировать на поступающую информацию).

2.2 Формализация основных понятий и объектов

Введем понятие стоимости портфеля V_t. Буднм находить ее как сумму цен активов, из которых портфель состоит:

$$V_t = \sum_{i=0}^{d} H_t^i X_t^i = H_t \cdot X_t$$

(здесь $H_t \cdot X_t$ обозначает скалярное произведение).

Определение 2.1. *Обусловленное обязательство называется* ***обязательством европейского типа****, если выплаты возможны только в конечный момент времени T.*

Рассмотрим примеры обязательств европейского типа. Пусть $\zeta \geqslant 0$ - случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_t$.

- $\zeta = (X_T - K)_+$ - выплата в момент T по европейскому опциону call. Здесь X_T - цена актива в момент T, K - цена исполнения опциона.

- $\zeta = (X_T - \min\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} X_t)$ - выплата в момент T по европейскому опциону lookback, то есть продажа актива по наилучшей цене за весь промежуток времени $[0, \dots,]$.

Мы будем так же рассматривать опционы американского типа, то есть опционы, которые можно реализовать в любой момент времени до терминального момента T включительно. Обозначим случайный процесс ξ_t - процесс возможных выплат по обязательству американского типа, $t \in [0, T]$. Процесс ξ_t должен быть адаптированным к $\mathbb{F}$, так как к моменту t величина выплаты определяется только информацией уже доступной к этому моменту времени. Например $\xi_t = (X_t - K)_+$ потенциальные выплаты по обязательству американского типа.

Нетрудно заметить, что опцион европейского типа является частным случаем опциона американского типа, при этом $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \dots, \xi_{T-1} = 0$, $\xi_T = \zeta$.

Продавец опциона получает в начальный момент времени некоторую премию P, а покупатель – право на получение некоторого платежа, зависящего от процесса цен. Получая премию P и используя стратегию H, продавец обязательства в момент времени t имеет портфель стоимостью $V_t = H_t \cdot X_t$.

Определение 2.2. *Говорят, что стоимость портфеля покрывает обязательство, если $V_T \geqslant \zeta$.*

Формализуем понятие безрисковости. Будем понимать безрисковость с точки зрения краткосрочных операций(операций, занимающих один шаг времени). Математически это означает, что процесс цен на безрисковый актив X_t^0 предсказуем и неубывает.

Пример 2.1. *Простешим примером такого 'безрискового' процесса может служить детерминированный процесс* $X_t^0 = (1+r)^t X_0$ *с* $r \geqslant 0$.

Немного более общим случаем является процесс $X_t^0 = (1+R_t)X_{t-1}$*, где* R_t *– предсказуемый, т.е.* $R_t \in \mathrm{m}\mathcal{F}_{t-1}$.

Известно, какой курс ЦБ устонавливает на следующий день, но неизвестен курс, который будет через пять дней. Такая модель может быть примером безрискового актива на один шаг времени.

Определение 2.3. *Под понятием bfseries самофинансируемости будем понимать условие, что на каждом шаге имеющиеся средства перераспределяются между активами без привлечения средств извне.*

Запишем это определение математически. Цена портфеля на момент времени t считается как сумма стоимостей всех активов:

$$V_t = \sum_{i=0}^{d} H_t^i X_t^i = H_t \cdot X_t. \tag{2.1}$$

Поскольку в каждый момент времени t необходимо сформировать портфель на следующий момент времени $t+1$ по ценам на момент времени t, то условие самофинансируемости записывается следующим образом:

$$H_{t+1} \cdot X_t = H_t \cdot X_t. \tag{2.2}$$

Чтобы такое условие выполнялось, предсказуемая последовательность H_t в момент времени t формируется на основании информации $\mathcal{F}_t$ следующим образом:

$$H_{t+1}^0 = \frac{1}{X_t^0}(H_t X_t - \sum_{i=1}^{d} H_{t+1}^i X_t^i). \tag{2.3}$$

Это равенство можно понимать следующим образом: в момент времени t составляется некоторый портфель из рисковых активов $X^1, \ldots, X^d$, а все остальные средства вкладываются в безрисковый актив.

Замечание 2.1. *Условие самофинансируемости можно записать и по другому:*

$$\vartriangle V_t = H_t \cdot \vartriangle X_t \tag{2.4}$$

Доказательство.

$$\vartriangle V_t = H_t \cdot X_t - H_{t-1} \cdot X_{t-1} = (H_t \cdot X_t - H_t \cdot X_{t-1}) + (H_t \cdot X_{t-1} - H_{t-1} \cdot X_{t-1}) = \\ H_t \vartriangle X_t + \underbrace{H_t \cdot X_{t-1} - H_{t-1} \cdot X_{t-1}}_{=0 (2.2)}$$

□

Такое условие можно трактовать как то, что изменение стоимости портфеля происходит только за счет изменения цен активов.

Упражнение 2.1. *Доказать, что совокупность условий (2.1) и (2.2) эквивалентна условиям (2.1), (2.4).*

Замечание 2.2. *Всюду в этом курсе предполагается, что все разности берутся назад: $\Delta V_t = V_t - V_{t-1}$. Такой оператор разности не выводит нас из класса измеримых относительно $\mathcal{F}_t$ случайных величин.*

Замечание 2.3. *В данной модели средства извне не привлекаются, но и отсутствуют (точнее, неучитываются) издержки. Иногда это требование является слишком сильным, т.к. происходит отток капитала за счет издержек.*

Утверждение 2.1. *Следующие два условия эквивалентны:*

1. $\triangle V_t \leqslant H_t \Delta X_t$
   и условие

2. $H_{t+1} X_t \leqslant H_t X_t$.

Замечание 2.4. *Пока вероятностная мера используется с точностью до класса эквивалентных данной мер. То есть нам необходимо лишь знать все множества меры 1 (или 0).*

3 Дисконтирование цен, актуализация

В ряде случаев оказывается возможным свести задачу к эквивалентной исходной (задаче в дисконтированных ценах), но при этом вывести из рассмотрения безрисковый актив. Такой прием называется дисконтированием цен.

Под дисконтированными ценами будем понимать $\tilde{X}_t^i$, определенные следующим образом:

$$\tilde{X}_t^i = \frac{X_t^i}{X_t^0}.$$

Из определения непосредственно следует, что $\tilde{X}_t^0 \equiv 1$, а дисконтированная стоимость портфеля вычисляется по формуле:

$$\tilde{V}_t = \frac{1}{X_t^0} H_t X_t = H_t \tilde{X}_t,$$

то есть формула (2.1) для стоимости портфеля сохраняет свой вид при дисконтировании.

Утверждение 3.1. *После дисконтирования свой вид сохраняют условие отсутствия притока капиталла и условие самофинансирования, то есть условия отсутствия притока капиталла и самофинансирования в дисконтированных ценах выполнены тогда и только тогда, когда они же выполнены в исходной задаче.*

От функции выплат разумно потребовать выполнение условий измеримости и однородности. Если имеем обусловленное обязательство $\zeta \geqslant 0$, то оно обязано быть измеримым относительно $\mathcal{F}_T$, а это условие эквивалентно тому, что функция выплат для некоторой f представима в виде

$$\zeta = f(X), \quad X = \{X_t, t \in [0,T]\}.$$

Условие измеримости следует понимать так, что функция выплат зависит исключительно на поведении цен рисковых активов, и не зависит ни от каких других факторов.

Поскольку было бы странно, если бы выплаты зависели от единиц измерения (тысячи или миллионы), то необходимо потребовать от функции выплат и свойства однородности. Поясним сказанное на примере.

Пример 3.1. *Функция выплат опциона типа call $\zeta = (X_T - K)_+$ не является однородной, однако, если взять $K = kX_0$, с безразмерным коэффициентом k, то в такой форме ζ однородна.*

Рассмотрим опцион европейского типа.

Определение 3.1. *Стратегия является* ***реплицирующей*** *(репликация), если $V_T = \zeta$. Если $V_T \geqslant \zeta$, то такую стратегию будем называть* ***суперрепликацией****.*

Смысл такого определения состоит в том, что в терминальный момент времени продавец опциона всегда сможет расплатиться со своим обязательством. При небольших премиях опциона таких стратегий может не существовать, однако для достаточно больших премий, суперреплицирующие стратегии существуют.

Определение 3.2. *Те обусловленные обязательства, для которых существуют реплицирующие стратегии, называются* ***достижимыми*** *(attainable).*

Замечание 3.1. *Дисконтирование сводит задачу к анализу портфеля с количеством активов на единицу меньшим (речь идет о самофинансируемых стратегиях).*

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle X_s,$$

где H_s – распределение активов в момент времени s.

Поскольку дисконтированная цена безрискового актива $X_s^0 \equiv 1$, то последнее равенство перепишется в следующем виде:

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle \tilde{X}_s = \tilde{V}_0 + \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} H_s^i \triangle \tilde{X}_s^i.$$

Как уже говорилось выше, для того, чтобы определить стратегию, нужно знать лишь количество рисковых активов в каждый момент времени, а безрисковый актив можно расчитать из условия самофинансируемости

4 Условия отсутствия арбитражных возможностей (условия безарбитражности рынка)

4.1 Определение. Фундаментальная теорема

Рассмотрим рынок с наличием безрискового актива, и дисконтируем цены $(X_t^0 = 1)$. Предполагается также, что $V_0 = 0$. Последнее условие означает отсутствие начального капитала.

Определение 4.1. *Наличие* ***арбитражной возможности*** *означает, что найдется самофинансируемая стратегия H для которой $V_T = H_T X_T \geqslant 0$ п.н. и, кроме того, выполнено одно из двух следующих эквивалентных условий: $\mathsf{P}(V_T > 0) > 0 \Longleftrightarrow \mathsf{E}\, V_T > 0$.*

Другими словами, арбитраж – возможность безрискового обогащения без начального капитала. Соответствующую стратегию называют арбитражной.

Определение 4.2. ***Гарантированной арбитражной стратегией*** *(доминантной или тривиальной стратегией) называется самофинансируемая стратегия с $V_T > 0$ п.н.*

Рис. 4:

Замечание 4.1. *Строгое неравенство в определении гарантированного арбитража является более сильным условием.*

Определение 4.3. *Пусть имеются две стратегии, H и $\hat{H}$. Будем говорить, что стратегия H* ***доминирует*** *стратегию $\hat{H}$ ($H \succ \hat{H}$), если при одинаковых начальных условиях получаем в итоге для стратегии H больший капитал, чем для стратегии $\hat{H}$, то есть $V_T > \hat{V_T}$.*

Схематически различные виды отсутствия арбитражных возможностей можно упорядочить по силе следующим образом:

Из предположения о том, что $\mathcal{F}_0$ – тривиальная, вытекает, что $V_0 = \mathrm{const}$. Вернемся к рассмотрению различных формулировок отсутствия арбитражных возможностей. Оказывается, что условие

$$\exists H : V_0 < 0,\ V_t \geqslant 0,\ t = 1, \dots, T.$$

равносильно условию существования доминантных стратегий.

Определение 4.4. ***Закон единой цены*** *выполняется, если не может существовать двух стратегий H' и H таких, что при начальных капиталах $V_0 < V_0'$ конечный капитал в обоих случаях одинаков п.н: $V_N = V_N'$.*

Другими словами, при выполнении закона единой цены по известному конечному капиталу самофинансируемой стратегии однозаначно определяется соответствующий ей начальный капитал.

Упражнение 4.1. *Показать, что из отсутствия гарантированного арбитажа вытекает закон единой цены. Построить примеры того, что включение строгое.*

Определение 4.5. ***Слабая инфомационная эффективность*** *полагается выполненной, если отсутствуют возможности арбитража при знании только полной информации о ценах.*
Под ***средней информационной эффективностью*** *понимают отсутствие арбитража при знании полной инфомация о ценах и всей общедоступной инфомации.*

Напомним игровое свойство мартингала: последовательность будет мартингалом тогда и только тогда, когда средний капитал инвестора при любой стратегии сохраняется. Поэтому рынок будет инфомационно эффективным тогда и только тогда, когда последовательность дисконтированных цен всех рисковых активов будет мартингалом. Из этого условия автоматически вытекает отсутствие арбитража.

Формализуем понятия слабой и средней информационной эффективности. Если в качестве фильтрации рассматривается каноническая: $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$ и X – мартингал относительно этой фильтрации, тогда рынок слабо информационно эффективный. Если в поток σ-алгебр входит помимо информации о ценах еще какая- либо информация, то речь идет о средней эффективности рынка. Оказывается, что отсутствие арбитражных возможностей для конечного горизонта равносильно условию отсутствия арбитражных возможностей на одном шаге, поэтому достаточно изучить одношаговую модель. Необходимость очевидна

Упражнение 4.2. *Доказать достаточность.*

Определение 4.6. *Говорят о* ***безарбитражности в слабом смысле****, если из $V_0 = 0$ и $V_t \geqslant 0$ для произвольного момента времени следует, что $V_T = 0$ п.н.*

Определение 4.7. *Говорят о* ***безарбитражности в сильном смысле****, когда из $V_0 = 0$ и в конечный момент времени $V_T \geqslant 0$, вытекает, что портфель имеет нулевую стоимость в любой момент времени $V_t = 0,\ t = 1, \dots, T$.*

Итак, пусть задана некоторая модель с вероятностной мерой P. Для доказательства отсутствия арбитражных возможностей достаточно задать некоторую меру, эквивалентную данной, для которой выполнена информационная эффективность рынка (то есть последовательность цен является мартингалом).

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ с конечным горизонтом $t \in [0, T]$.

Определение 4.8. *Мера Q, эквивалентная исходной, называется* ***мартингальной мерой****, если является мартингалом относительно Q.*

Теорема 4.1 (Фундаментальная теорема). *Условие отсутствия арбитражных возможностей эквивалентно тому, что класс мартингальных мер не пуст.*

Введем некоторые обозначения: $\mathcal{M}(\mathsf{P})$ – класс мартингальных мер, $\mathcal{M}_{loc}(\mathsf{P})$ – класс мер, относительно которых X является локальным мартингалом (или обобщенным мартингалом, так как в случае конечного горизонта эти понятия эквивалентны), $\mathcal{M}_a(\mathsf{P})$ – класс мер, у которых плотность меры Q относительно меры P ограничена константой a:

$$\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}} \leqslant a.$$

Для этих трех классов мер справедливо следующее включение:

$$\mathcal{M}_a(\mathsf{P}) \subseteq \mathcal{M}(\mathsf{P}) \subseteq \mathcal{M}_{loc}(\mathsf{P}).$$

Оказывается, что непустота любого из этих классов равносильна условию безарбитражности (см. [1]).

Определение 4.9. *Под* ***точкой роста*** *распределения будем понимать точку, у которой любая окрестность имеет положительную меру.*

Определение 4.10. ***Топологический носитель*** *распределения – это множество всех точек роста.*

Для широкого класса пространств топологический носитель вероятностной меры можно определить и как наименьшее замкнутое множество полной меры.

Таким образом, есть три эквивалентных способа описания условий безарбитражности рынка:

1. Отсутствие арбитражных возможностей (по определению).

2. Непустота класса мартингальных мер: $\mathcal{M}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$.

3. Относительная внутренность замкнутой выпуклой оболочки носителя (регулярного) условного распределения

$$\mathsf{P}\{\triangle X_t \in B | \mathcal{F}_{t-1}\} = Q_t(\omega, B)$$

должна содержать нуль п.н. (то есть для почти всех ω), $\forall t = 1, \dots, T$ (в символьной форме это можно записать следующим образом: $\mathrm{ri}\,\overline{\mathrm{conv}}\,\mathrm{supp}\,Q_t(\omega, \cdot) \ni 0$ п.н., где ri обозначает относительную внутренность множества, $\overline{\mathrm{conv}}$ – замыкание выпуклой оболочки, supp – носитель распределения).

Из второго условия, используя игровой смысл мартингала с конечным горизонтом, можно получить первое. Обратное утверждение является более тонким результатом и сводится к применению одного из вариантов теоремы об отделимости.

Пример 4.1. *Для примера, применим третье условие для проверки безарбитражности конкретной модели. Пусть $t = 0, 1$ (одношаговая модель), а $\mathcal{F}_0$ – тривиальная σ-алгебра. При этом $V_1 = V_0 + H_0 \triangle X_1$. Далее, пусть $\triangle X_1$ имеет дискретное распределение, сосредоточенное в двух точках:*

$$\mathrm{supp}\,\mathsf{P}_{\triangle X_1} = \{a, b\}.$$

Тогда

- *если $0 \leqslant a < b$, то арбитражные возможности есть (можно все вложить в рисковый актив).*
- *если $a < b \leqslant 0$, то абитражные возможности снова есть (все вкладываем в безрисковый актив).*
- *если $a < 0 < b$, то арбитражных возможностей нет.*

4.2 Понятие полноты рынка

Определение 4.11. *Рынок называют* ***полным****, если любое обусловленое обязательство достижимо при некотором начальном капитале.*

Справедлив следующий критерий полноты:

Теорема 4.2. *Безарбитражный рынок полон тогда и только тогда, когда класс мартингальных мер $\mathcal{M}(\mathsf{P})$ содержит единственную меру.*

Еще один критерий записывается в терминах носителей распределений:

Утверждение 4.1. *Для того, чтобы рынок был полным, необходимо и достаточно, чтобы п.н. носитель условного распределения $\mathsf{P}_{\triangle X_t | \mathcal{F}_{t-1}}$ содержал не более, чем $d + 1$ точку.*

Замечание 4.2. *В дискретном случае полнота не является естественным свойством рынка (скорее исключение, чем правило).*

Проиллюстрируем это на рассмотренной выше одношаговой модели. В данном случае в силу того, что $\mathcal{F}_0$ – тривиальная, для мартингальной меры должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} & \mathsf{E}^{\mathcal{F}_0} \triangle X_1 = \mathsf{E}\, \triangle X_1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \qquad & p_a a + p_b b = 0, \quad p_a + p_b = 1, \quad p_a \geqslant 0, \quad p_b \geqslant 0 \end{aligned}$$

Последняя система имеет единственное решение, когда $a < 0 < b$. В этом случае модель будет полной. При этом

$$p_a = \frac{b}{b-a}, \qquad p_b = \frac{-a}{b-a}.$$

В случае $\mathrm{supp}(\mathsf{P}_{\triangle X}) = a, b, c,\ a < b < c$ вероятностное решение будет существовать только в случае $a < 0 < c$. Однако, при этом единственности нет, поэтому в этих условиях модель уже не полна.

5 Опциональное разложение и его использование в задаче ценообразования и хеджирования обусловленных обязательств

Введем понятие **существенного супремума**. Пусть имеется (произвольное) семейство случайных величин $X_\alpha, \alpha \in I$.

Определение 5.1. *Случайная величина X^* называется* ***существенным супремумом*** *семейства X_α, если:*

1. *для $\forall \alpha \quad X^* \geqslant X_\alpha$ п.н.;*
2. *из того, что $X \geqslant X_\alpha$ п.н. $\forall \alpha$, следует, что $X \geqslant X^*$ п.н.*

Обозначать существенный супремум будем $X^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} X_\alpha$.

Замечание 5.1. *Из определения не следует существования X^*.*

Замечание 5.2. $\forall \alpha \in I \quad \mathsf{P}(X^* \geqslant X_\alpha) = 1$, *при этом квантор $\forall \alpha$ вносить в скобки нельзя.*

Замечание 5.3. *Если функция f строго монотонно возрастающая, тогда из этого определения следует, что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} f(X_\alpha) = f(\operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} X_\alpha),$$

где равенство рассматривается в предположения существования существенного супремума, т.е. если первый существенный супремум существует, тогда существует и второй, и они равны.

Докажем корректность определения для равномерно ограниченного семейства:

$$\exists C:\ \forall \alpha\, |X_\alpha| \leqslant C$$

(В общем случае достаточно рассмотреть новое семейство $Y_\alpha = \arctan X_\alpha$).

Теорема 5.1. *Существенный супремум для семейства ограниченных случайных величин корректно определен и существует не более чем счетное подмножество индексов $C \subseteq I$ такое, что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigvee_{\alpha \in C} X_\alpha$$

(здесь значок $\bigvee$ обозначает операцию взятия обычного супремума).

Доказательство. Определим

$$x^* = \sup_{B \subseteq I} \mathsf{E} \bigvee_{\alpha \in B} X_\alpha,$$

где B – конечное множество. По определению sup, существует последовательность множеств B_n таких, что

$$\mathsf{E} \bigvee_{\alpha \in B_n} X_\alpha \to x^*, \ \ n \to \infty.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что все B_n – монотонно возрастающие. (если это не так, можно взять $B'_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ и последовательность по прежнему будет сходиться к x^*). Пусть $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, тогда определим последовательность

$$X'_n = \bigvee_{\alpha \in B_n} X_\alpha.$$

Последовательность X'_n монотонно возрастает и сходится к некоторой величине X^* п. н. Кроме того, по соответствующим теоремам (лемма Беппо Леви) о сходимости под знаком интеграла $\mathsf{E}\, X^*$ будет конечной величиной и $\mathsf{E}\, X^* = x^*$.

Осталось проверить два свойства из определения:

1. покажем, что X^* доминирует исходное семейство. Допустим, найдется некоторое X_{α_0}, не доминируемое случайной величиной X^*. Тогда нетрудно проверить, что $\mathsf{E}\, X^* \vee X_{\alpha_0} > x^*$, и более того, для некоторого n верно $\mathsf{E}\, X'_n \vee X_{\alpha_0} > x^*$, что противоречит определению x^*. В самом деле, получается что

$$\mathsf{E} \bigvee_{\alpha \in B'_n \cap \{\alpha_0\}} X_\alpha > x^*.$$

   Значит, наше допущение о том, что X^* не доминирует X_{α_0} неверно.

2. Если $Y \geqslant X_\alpha$ для всех α, то это верно и для $\alpha \in B_n$. Следовательно, $Y \geqslant X'_n$ п.н. Переходя к пределу, окончательно получаем $Y \geqslant X^*$ п.н.

□

Рассмотрим фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ и $\mathcal{M}(\mathsf{P})$– множество мартингальных мер. Пусть задан векторнозначный процесс X – процесс цен. Рассмотрим модель с конечным горизонтом: $t = 0, 1, ..., T$. Будем предполагать, что множество мартингальных мер непусто ($\mathcal{M}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$) (это эквивалентно условию отсутствия арбитражных возможностей).

Будем рассматривать адаптированный случайный процесс $\{V_t, t = 0, 1, ..., T\}$ и $V_t \geqslant 0$. Будем интерпритировать V_t как капитал в момент времени t. Рассматриваются стратегии, при которых текущий капитал (стоимость портфеля) не может быть отрицательным.

Определение 5.2. *Будем говорить, что процесс X является* ***$\mathfrak{M}$-тотальным мартингалом*** *(соответственно, супер- и субмартингалом) для семейства мер $\mathfrak{M}$, если X является мартингалом (супер-, субмартингалом) относительно любой меры из класса $\mathfrak{M}$.*

В сделанных предположениях имеет место следующий результат

Теорема 5.2. *При сделанных предположжкниях для того, чтобы процесс $V_t \geqslant 0$ отвечал самофинансируемой стратегии, необходимо и достаточно, чтобы он был локальным мартингалом по отношению к любой мартингальной мере $\mathsf{Q} \in \mathcal{M}(\mathsf{P})$ (т.е. $\mathcal{M}(\mathsf{P})$-тотальным мартингалом).*

Если рассматриваются стратегии без притока капитала, то для них справедлив следующий результат:

Теорема 5.3 (Крамкова). *Для того, чтобы $V_t \geqslant 0$ отвечал стратегии без притока капитала, небходимо и достаточно, чтобы процесс V_t был супермартингалом относительно любой мартингальной меры $\mathsf{Q} \in \mathcal{M}(\mathsf{P})$ ($\mathcal{M}(\mathsf{P})$-тотальным супермартингалом).*

Упражнение 5.1. *Проверить для теоремы Крамкова необходимость.*

Замечание 5.4 (Опциональное разложение). *Теорему Крамкова называют еще опциональным разложением, т.к. можно переформулировать результат следующим образом. По определению стратегии без притока капитала, справедливо следующее неравенство: $\triangle V_t - H_t \triangle X_t \leqslant 0$. Поэтому справедливо следующее соотношение **(опциональное разложение)**:*

$$V_t = V_0 + (H \circ X)_t - C_t, \tag{5.1}$$

где C_t – адаптированная, возрастающая (предсказуемости не требуется). Таким образом V_t – отвечает стратегии без притока капитала тогда и только тогда, когда V_t – представимо в виде

Эти результаты позволяют отделить задачу ценообразования от задачи хеджирования. Например, применим теорему Крамкова к решению **задачи ценообразования обязательства европейского типа**. Будем рассматривать лишь процессы $V_t \geqslant 0$ и такие, что $V_T \geqslant \zeta$ п.н. Здесь $\zeta \geqslant 0$ – обусловленное обязательство, $\zeta \in \mathrm{m}\mathcal{F}_T$.

Нас интересует страрегии с минимальным возможным начальным капиталом, позволяющая покрыть свои обязательства в конечный момент времени (такие стратегии называются **минимальным хеджем**), т.е. $\hat{V}$ – минимлаьный хедж, если $V_t \geqslant \hat{V}_t$ для любой V – хеджирующей стратегии. Минимальный хедж необходимо знать, т.к. $\hat{V}_0$ дает нам стоимость 100% покрытия. По теореме Крамкова V_t является супермартингалом относительно любой меры из $\mathsf{Q} \in \mathcal{M}(\mathsf{P})$, то

$$V_t \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_T} V_T \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_T} \zeta.$$

Таким образом, получаем

$$V_t \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathcal{M}(\mathsf{P})} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_T} \zeta = \tilde{V}_t.$$

Оказывается, что $\tilde{V}$ является неотрицателным $\mathcal{M}(\mathsf{P})$-тотальным супермартингалом (это еще надо доказывать). Следовательно, по теореме Крамкова, $\tilde{V}$ отвечает стратегии без притока капитала. Отсюда получаем, что $\tilde{V}$ является минимальным хеджем, т.е. можно положить: $\hat{V} := \tilde{V}$.

Пусть ζ – неотрицательная $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина. Пусть задана мера Q из класса мартингальных мер: $\mathsf{Q} \in \mathcal{M}(X)$.

Определение 5.3. *ζ называется **Q-воспроизводимым** (simulable) обусловленным обязательством, если существует начальный капитал V_0 и стратегия H без притока капитала такие, что: $\zeta = V_T$ и V_t является Q-мартингалом и имеет место равенство*

$$V_t = V_0 + \sum_{s=0}^{t} H_s \triangle X_s = V_0 + (H \circ X)_t.$$

Предположим, что $\mathcal{F}_0$ — тривиальная.

Утверждение 5.1. *Равносильны следующие утверждения:*

1) *Обусловленное обязательство ζ является Q^*-воспроизводимым.*

2) *Найдется мера $\mathsf{Q}^* \in \mathcal{M}$ такая, что $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}\,\zeta = \sup\limits_{\mathsf{Q}\in\mathcal{M}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\,\zeta$.*

Доказательство. Пусть наше обусловленное обязательство ζ удолетворяет второму условию. Докажем, что супремум достигается на Q^*. Имеем:

$$V_t = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}^{\mathcal{F}_t} V_T = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}^{\mathcal{F}_t} \zeta \geqslant 0.$$

В частности, $V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}\,\zeta$. Поскольку процесс стоимости самофинансируемого портфеля V - тотальный супермартингал, то для любой меры $\mathsf{P} \in \mathcal{M}(X)$ имеем

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\,\zeta = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\,V_T \leqslant V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}\,\zeta.$$

Значит в первом условии супремум дотигается на Q^*.

Обратно, пусть выполняется первое условие. Обозначим $\hat{V}_t = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathsf{Q}\in\mathcal{M}(X)} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_k}\,\zeta$. В частности, $\hat{V}_0 = \sup\limits_{\mathsf{Q}\in\mathcal{M}(X)} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\,\zeta$. Вспомним, что для V_t имеет место разложение $\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + (H\circ X)_t - C_t$. Здесь C_t неубывающий, адаптированный процесс с $C_0 = 0$.

В этом разложении $\tilde{V}_0 = \sup\limits_{\mathsf{P}\in\mathcal{M}(X)} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\,\zeta = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}\,\zeta$. Интегральное преобразование $(H\circ X)_t$ - локальный мартингал относительно меры Q^*. Поэтому

$$V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}\,\zeta = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}(V_0 + (H\circ X)_t - C_T) \leqslant V_0 + 0 - \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}\,C_T$$

Значит $C \equiv 0$ (условие самофинансируемости) и

$$V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}\,V_T = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^*}\,\zeta.$$

Кроме того, поскольку конечный капитал обязан покрывать обусловленное обязательство, получим: $V_T \geqslant \zeta$. Отсюда $V_T = \zeta$. В силу упражнения (5.2) последовательность $\hat{V}$ - мартингал относительно меры Q^*, что доказывает утверждение. $\square$

Упражнение 5.2. *Если V_t - супермартингал и $\mathsf{E}\,V_T = V_0$, то V_t - мартингал.*

6 Условия коммутируемости существенного супремума и оператора математического ожидания. Доказательство супермартингальности

Лемма 6.1. *Для произвольного семейства случайных величин Γ п.в. справедливо неравенство:*

$$\mathsf{E}^{\mathcal{A}} \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\Gamma} \xi \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\Gamma} \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi. \tag{6.1}$$

Доказательство. Из определения существенного супремума и из свойства монотонности оператора условного математического ожидания следует, что

$$\mathsf{E}^{\mathcal{A}} \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\Gamma} \xi \geqslant \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi, \;\; \forall \xi\in\Gamma.$$

Отсюда можно сделать вывод, что случайная величина $\mathsf{E}^{\mathcal{A}} \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\Gamma} \xi$ является мажорантой для семейства $\left\{\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi,\ \xi\in\Gamma\right\}$. Но опять же из определения существенного супремума следует, что величина $\operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\Gamma} \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ является минимальной мажорантой этого семейства, поэтому неравенство (6.1) действительно имеет место. □

Ответ на вопрос, когда неравенство (6.1) выполняется в виде равенства, дает следующее утверждение:

Лемма 6.2. *Пусть семейство случайных величин Γ обладает тем свойством, что для любых $\xi_1\in\Gamma$ и $\xi_2\in\Gamma$ найдется величина $\xi_3\in\Gamma$ такая, что $\xi_3\geqslant\xi_1$ (п.н), $\xi_3\geqslant\xi_2$ (п.н), тогда неравенство (6.1) обращается в равенство.*

Доказательство. Обозначим $\xi^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\Gamma}\xi$. Раньше мы показали, что существенный супремум совпадает с обычным супремумом на некотором счетном подмножестве семейства Γ. Таким образом, мы можем утверждать, что найдутся такие случайные величины $\xi_i\in\Gamma,\ i=1,2,\dots$, что будет выполнено равенство $\xi^*=\sup\{\xi_i,\ i=1,2,\dots\}$. Так как в Γ существует мажоранта для любых двух его элементов, то существует мажоранта и для любого конечного числа элементов, т.е. для любого $n\geqslant 1$ найдется величина $\xi_n'\in\Gamma$, такая что

$$\xi_n' \geqslant \max\{\xi_i,\ i=1,\dots,n\}.$$

Нетрудно заметить, что ξ_n' монотонно сходятся к ξ^*. Для доказательства леммы достаточно показать, что неравенство (6.1) выполнено и в другую сторону. Действительно,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\Gamma}\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \geqslant \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_n' \geqslant \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\max\{\xi_i,\ i=1,\dots,n\},\ \ \forall n\geqslant 1$$

Устремляя n к бесконечности, получаем нужное неравенство:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\Gamma}\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \geqslant \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi^*$$

Лемма доказана. □

До сих пор мы имели дело с семейством эквивалентных мер. Но это не всегда удобно. Можно выделить одну меру, и каждой другой мере поставить в соответствие некоторую функцию – ее плотность (производную Радона-Никодима). Итак, пусть нам задано произвольное вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathsf{P})$ и Q – мера абсолютно непрерывная относительно меры P. Через Z обозначим производную Радона-Никодима меры Q относительно меры P:

$$Z=\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}.$$

Введем в рассмотрение **локальные плотности**:

$$Z_t=\frac{d\mathsf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathsf{P}\big|_{\mathcal{F}_t}},$$

где через $\mathsf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t}$, $\mathsf{P}\big|_{\mathcal{F}_t}$ обозначены меры, суженные на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$, то есть это меры на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{F}_t)$. Семейство таких локальных плотностей образует случайный процесс. Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 6.1. *Семейство случайных величин ξ_t является процессом локальных плотностей в том и только том случае, когда ξ_t образуют равномерно интегрируемый мартингал.*

В дальнейшем мы будем придерживаться соглашения о том, что если опущен нижний индекс у оператора условного математического ожидания $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}$, то под ним понимается условное математическое ожидание, вычисленное относительно меры P.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 6.3. *Если семейство случайных величин $\{\xi_t\}$ является неотрицательным супермартингалом, то*

$$\{\xi_t = 0\} \subseteq \{\xi_{t+1} = 0\} \text{ (п.н.)}$$

Другими словами, если $\tau = \inf\{t \,:\, \xi_t = 0\}$ – марковский момент первого попадания в нуль, то на множестве $\{\tau < +\infty\}$ справедливо $\xi_\tau = \xi_{\tau+1} = \ldots = 0$. Считается, что $\inf \varnothing = +\infty$.

Доказательство. Напомним, что запись $A \subseteq B$ (п.н.) означает, что $\mathsf{P}(A \setminus B) = 0$. Так как $\{\xi_t\}$ – неотрицательный супермартингал, то

$$0 \leqslant \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\, \xi_{t+1} \leqslant \xi_t.$$

Отсюда следует включение

$$\{\xi_t = 0\} \subseteq \{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\, \xi_{t+1} = 0\}.$$

Теперь воспользуемся тем фактом, что если уловное математическое ожидание относительно некоторой σ-алгебры от неотрицательной случайной величины равно нулю, то и сама эта случайная величина п.н. равна нулю. Таким образом, получаем следующую цепочку включений

$$\{\xi_t = 0\} \subseteq \{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\, \xi_{t+1} = 0\} \subseteq \{\xi_{t+1} = 0\},$$

которая и доказывает лемму. □

Утверждение 6.2. *Пусть Z_t процесс локальных плотностей, тогда существуют неотрицательные случайные величины z_t, являющиеся $\mathcal{F}_t$ - измеримыми, с $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, z_t = 1$ и справедливо следующее соотношение:*

$$Z_{t+1} = z_{t+1} Z_t, \tag{6.2}$$

которое носит название мультипликативного представления для семейства локальных плотностей.

Доказательство. Построим z_t следующим образом:

$$z_t = \begin{cases} \dfrac{Z_t}{Z_{t-1}}, \text{ на множестве } Z_{t-1} > 0 \\ \xi_t \geqslant 0. \end{cases}$$

Здесь ξ_t – $\mathcal{F}_t$-измерима, с $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_t = 1$ на множестве $Z_{t-1} = 0$. В качестве случайной величины ξ_t, удовлетворяющей указанным требованиям, можно взять, например, $\xi_t \equiv 1$. Покажем, что так построенная z_t будет удовлетворять всем необходимым требованиям. Действительно, так как $Z_t \geqslant 0$ и $\mathcal{F}_t$ - измерима, то z_t также будет неотрицательной $\mathcal{F}_t$ - измеримой величиной. Используя то, что Z_t мартингал, можем записать:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, z_t = \begin{cases} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \dfrac{Z_t}{Z_{t-1}} = \dfrac{1}{Z_{t-1}}\, \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, Z_t = 1, \quad \text{на } \{Z_{t-1} > 0\} \\ \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_t = 1, \quad \text{на } \{Z_{t-1} = 0\}, \end{cases}$$

то есть $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, z_t \equiv 1$. Из построения z_t следует, что равенство $Z_{t+1} = z_{t+1} Z_t$ выполняется на множестве $\{Z_{t-1} > 0\}$. Из предыдущей леммы следует, что если $Z_t = 0$, то $Z_{t+1} = 0$, поэтому равенство $Z_{t+1} = z_{t+1} Z_t$ выполняется и на множестве $\{Z_{t-1} = 0\}$. Утверждение полностью доказано. □

Дадим интерпретацию величин z_t, построенных нами при доказательстве предыдущего утверждения. Пусть $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X_1, \dots, X_t$, т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$. Тогда z_{t+1} представляет собой условную плотность для переменной X_{t+1} при известных $X_1, \dots, X_t$.

Итак, если задан процесс локальных плотностей Z_t, то существует семейство случайных величин z_t, удовлетворяющее перечисленными выше свойствами. И наоборот, если задано такое семейство z_t, то положив $Z_{t+1} = z_{t+1} Z_k$ получим процесс локальных плотностей. Таким образом, меру Q, абсолютно непрерывную относительно меры P, можем задавать с помощью z_t.

Дадим теперь формулу пересчета условного математического ожидания по новой мере Q, являющейся абсолютно непрерывной относительно заданной меры P. Пусть $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$, $Z = \dfrac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}$, тогда:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{A}}_{\mathsf{Q}} Y = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{E}^{\mathcal{A}}(ZY)}{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} Z}, \text{ на множестве } \{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} Z > 0\} \\ \eta - \mathcal{A}\text{-измеримая с.в., на множестве } \{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} Z = 0\} \end{cases} \tag{6.3}$$

Так как $Z \geqslant 0$, то $\{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} Z = 0\} \subseteq \{Z = 0\}$, а множество $\{Z = 0\}$ имеет нулевую меру Q, в силу того что Z – плотность. Следовательно, $\{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} Z = 0\}$ также имеет нулевую меру Q. Поэтому корректна запись:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{A}}_{\mathsf{Q}} Y = \frac{\mathsf{E}^{\mathcal{A}}(ZY)}{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} Z},$$

так как знаменатель обращается в ноль только на множестве нулевой меры.

Лемма 6.4. *Пусть η – $\mathcal{F}_s$ - измеримая случайная величина, $s > t$. Тогда*

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}_{\mathsf{Q}} \eta = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}(z_{t+1} \cdot \ldots \cdot z_s \eta)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{A}}{}_{\mathsf{Q}} Y = \frac{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} ZY}{\mathsf{E}^{\mathcal{A}} Z},$$

где $Z = \dfrac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}$ и $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$.

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}{}_{\mathsf{Q}} \eta = \frac{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} Z\eta}{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} Z} = \frac{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_s} Z\eta}{Z_t} = \frac{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} \eta Z_s}{Z_t} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\eta \frac{Z_s}{Z_t}\right) = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}\left(z_{t+1} \cdot \ldots \cdot z_s \eta\right)$$

□

Введем следующее обозначение:

$$\tilde{V}_t = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{M}(X)} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t}{}_{\mathsf{Q}} \zeta, \quad \zeta \geqslant 0,$$

здесь $\zeta \in \mathrm{m}\mathcal{F}_T$ – платежная функция обусловленного обязательства, $\mathcal{M}(X)$ – множество всех мартингальных мер, эквивалентных P.

Мы хотим показать, что $\tilde{V}$ – $\mathcal{M}(X)$-тотальный супермартингал. Обозначим

$$G^{\mathsf{Q}}_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}_{\mathsf{Q}} \tilde{V}_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z_t \tilde{V}_t.$$

Последнее равенство следует из леммы (6.4).

Утверждение 6.3. *Докажем, что* $G_t^{\mathsf{Q}} \leqslant \tilde V_{t-1} \ \ \forall \mathsf{Q} \in \mathcal{M}(X)$.

Доказательство. Введем D_t - множество положительных $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин таких, что $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z \,\triangle X_t = 0$ и $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z = 1$, т.е.

$$D_t = \{z:\ z \in \mathrm{m}\mathcal{F}_t,\ z \geqslant 0,\ \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z \,\triangle X_t = 0,\ \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z = 1\}$$

Замечание 6.1. *1. Если* $\mathsf{Q} \sim \mathsf{P}$, *тогда* $z > 0$,

2. если $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$, *тогда* $z \geqslant 0$.

Распишем подлобнее G_t^{Q}:

$$G_t^{\mathsf{Q}} = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z_t \tilde V_t = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z_t \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{z_{t+1}\in D_{t+1}\dots z_T\in D_T} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} z_{t+1}\cdot\ldots\cdot z_T\zeta =$$
$$= \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \operatorname*{ess\,sup}_{z_{t+1}\in D_{t+1}\dots z_T\in D_T} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} z_t\cdot z_{t+1}\cdot\ldots\cdot z_T\zeta.$$

Используя лемму о перестановочности операторов ess sup и $\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}$ продолжаем цепочку равенств:

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{z_{t+1}\in D_{t+1}\dots z_T\in D_T} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z_t z_{t+1}\cdot\ldots\cdot z_T\zeta \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{z_t\in D_t\dots z_T\in D_T} \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} z_t\cdot\ldots\cdot z_T\zeta = \tilde V_{k-1}.$$

Осталось показать справедливость применения леммы о перестановочности. Для этого рассмотрим множество случайных величин

$$\Gamma_t = \{\eta:\ \eta = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_t} z_t\cdot\ldots\cdot z_T\zeta,\ \ z_t\in D_t,\ldots,z_T\in D_T\}.$$

Оказывается, в качестве мажоранты двух случайных величин из Γ_t можно взять их супремум, снова из этого же множества. Рассмотрим η и η' – две случайные величины из Γ_t. Пусть $\eta'' = \eta\vee\eta'$ - наименьшая мажоранта η и η'. Покажем, что $\eta''\in\Gamma_t$. Определим множество $A = \{\omega : \eta'(\omega) \geqslant \eta(\omega)\} \in \mathcal{F}_k$.

Положим $z_j'' = 1_A z_j' + 1_{\bar A} z_j, \quad j = t+1,\ldots,T$. Покажем, что z_j'' соответствует случайная величина η''. Почти наверное $z_j'' > 0$ и

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} z_j'' = \mathsf{E}^{F_{j-1}}[1_A z_j' + 1_{\bar A} z_j] = 1_A\,\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} z_j' + 1_{A^C}\,\mathsf{E}^{F_{j-1}} z_j = 1_A + 1_{\bar A} = 1.$$

Таким образом, условие нормировки выполнено. Аналогично проверяется условие мартингальности:

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} z_j'' \,\triangle X_j = 1_A 0 + 1_{\bar A} 0 = 0.$$

Из того, что $z_j\in D_j$ и $z_j'\in D_j$, заключаем $z_j''\in D_j, j = t+1,\ldots,T$. Оказывается, что

$$\eta'' = \eta\vee\eta' = \mathsf{E}^{\mathcal{F}_k} z_t'' z_{t+1}''\cdot\ldots\cdot z_T''\zeta.$$

Тем самым, мы доказали выполнение всех условий леммы о перестановочности. Окончательно, $\tilde V$ - тотальный супермартингал относительно семейства мер $\mathcal{M}(X)$. ☐

Можно выделить важный случай, когда распределение $\triangle X_t$ сосредоточено в конечном числе точек.

Упражнение 6.1. *Показать, что при замене существенного супремума по множеству мартингальных мер, эквивалентных исходной мере, на супремум по множеству абсолютно непрерывных относительно исходной мартингальных мер, значение супремума не изменится.*

7 Постановка задачи хэджирования для американских опционов

Предположим, заданы фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ и адаптированный случайный процесс $\xi_t, t = 0, \dots, T$ на нем, определяющий потенциальные выплаты по обязательству в момент времени t. Здесь $T > 0$ — последний возможный момент исполнения обязательства. Для гарантированного хэджирования необходимо выбрать стратегию так, чтобы в любой момент времени $t = 0, \dots, T$ было выполнено неравенство $V_t \geqslant \xi_t$, где V_t — стоимость портфеля на момент времени t при использовании данной стратегии перераспределения активов.

Определение 7.1. ***Минимальным хэджем*** *называется стратегия без притока капитала, при которой для процесса стоимости портфеля $\hat{V}_t$ выполнены следующий соотношения:*

1) для всех $t = 0, \dots, T$ выполнено $\hat{V}_t \geqslant \xi_t$ п.н.;

2) Для любого хэджа (то есть стратегии без притока капитала, для стоимости портфеля V_t которой выполнено 1), для всех $t = 0, \dots, T$ справедливо $V_t \geqslant \hat{V}_t$.

Пусть задано семейство мер $\mathfrak{M}$.

Определение 7.2. ξ^* — ***наименьший $\mathfrak{M}$-тотальный супермартингал, мажорирующий*** *ξ, если*

1) ξ^* — $\mathfrak{M}$-тотальный супермартингал, $\xi^* \geqslant \xi$;

2) Для любого $\mathfrak{M}$-тотального супермартингала η, для которого выполнено 1), справедливо $\eta \geqslant \xi^*$.

Похожесть последних двух определений делает интуитивно более понятным следующее:

Утверждение 7.1. *$\hat{V}_t$ — наименьший тотальный супермартингал относительно класса $\mathcal{M}(X)$ всех мартингальных мер, мажорирующий ξ_t.*

Доказательство утверждения в предположении существования минимального хэджа непосредственно вытекает из определений и теоремы Крамкова. Для того, чтобы показать существование минимального хэджа, построим тотальную оболочку Снэлла.

Итак, пусть задано $\mathfrak{M}$ — некоторое семейство мер. Предположим, что семейство $\mathfrak{M}$ – доминируемое, т.е. существует σ-конечная мера μ, относительно которой каждая мера $\mathsf{P} \in \mathfrak{M}$ абсолютно непрерывна: $\mathsf{P} \ll \mu$ (таким образом, $\mathfrak{M}$ — доминируемое семейство). Без ограничения общности μ можно считать конечной (и даже вероятностной) мерой.

Доказательство существования наименьшего тотального супермартингала, мажорируюшего ξ проведем конструктивно.

Утверждение 7.2. *Предположим,*

$$\xi_T^* = \xi_T, \qquad \xi_t^* = \xi_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{P} \in \mathfrak{M}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*, \quad t = 0, \dots, T-1. \tag{7.1}$$

Тогда ξ^* — наименьший $\mathfrak{M}$-тотальный супермартингал, мажорирующий ξ.

Выписанное реккурентное уравнение в обратном времени является некоторым аналогом уравнения Беллмана.

Замечание 7.1. *Если* $\mathfrak{M} = \{\mathsf{P}\}$, *то есть в терминах исходной модели мы находимся в условиях полного рынка, то мы получим, что* $\xi_T^* = \xi_T$, $\xi_t^* = \xi_t \vee \mathsf{E}_{\mathsf{P}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*$, $t = 0, \dots, T-1$, *что совпадает с полученным ранее выражением для оболочки Снэлла.*

Доказательство. 1) Очевидно, $\xi^* \geqslant \xi$. Покажем, что ξ^* — $\mathfrak{M}$-тотальный супермартингал, то есть $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^* \leqslant \xi_t^*$ для любой $\mathsf{Q} \in \mathfrak{M}$. По определению существенного супремума, $\xi_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{P}\in\mathfrak{M}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^* \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*$ почти наверное, откуда мы немедленно получаем требуемое неравенство.
2) Предположим, η — $\mathfrak{M}$-тотальный супермартингал, для которого выполнено 1) из определения 7.2. Покажем, что $\eta_t \geqslant \xi_t^*$ при всех $t = 0, \dots, T$. Доказательство будем вести по индукции. Для $t = T$ это очевидно. Пусть $\eta_{t+1} \geqslant \xi_{t+1}^*$, покажем, что $\eta_t \geqslant \xi_t^*$. Так как для η выполнено 1) из определения 7.2, то для всех $\mathsf{Q} \in \mathfrak{M}$ справедливо $\eta_t \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \eta_{t+1} \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*$ почти наверное относительно меры μ. Отсюда $\eta_t \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{P}\in\mathfrak{M}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*$. Но $\eta_t \geqslant \xi_t$. Объединяя два последних неравенства, получаем, что $\eta_t \geqslant \xi_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{P}\in\mathfrak{M}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^* = \xi_t^*$, что и требовалось. ☐

Замечание 7.2. *Когда речь идет об обязательстве европейского типа, мы можем для величины выплаты* $\zeta \geqslant 0$ *положить* $\xi_t = 0$, *если* $t < T$, *и* $\xi_T = \zeta$. *В этом случае (7.1) принимает следующий вид:*

$$\xi_T^* = \zeta, \qquad \xi_t^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{P}\in\mathfrak{M}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*, \quad t = 0, \dots, T-1. \tag{7.2}$$

7.1 Задача об оптимальной остановке

Определим следующий процесс:

$$\bar{V}_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{\mathsf{Q}\in\mathcal{M}(X)\\ \tau\in\mathcal{T}_{[t,T]}}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \xi_\tau. \tag{7.3}$$

Теорема 7.1. $\bar{V}$ — $\mathcal{M}(X)$*-тотальный супермартингал, мажорирующий* ξ.

Если рынок полный, то $\bar{V}_t$ совпадает с оболочкой Снелла, то есть $\bar{V}_t$ — наименьший тотальный супермартингал, мажорирующий ξ, откуда $\bar{V}_t = \hat{V}_t$.

В случае обязательства европейского типа это результат предыдущего параграфа. Здесь $\bar{V}_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathcal{M}(X)} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \zeta$.

Таким образом, в двух частных случаях доказано, что $\bar{V}_t = \hat{V}_t$.

8 Модель Кокса-Росса-Рубинштейна

8.1 Описание модели

Пусть B_t - цена безрисового актива в момент времени n, и S_t - цена рискового актива. Мы будем моделировать их с помощью следующих реккурентных уравнений:

$$\begin{cases} B_t = (1+r)B_{t-1} \\ S_t = (1+\rho_t)S_{t-1} \end{cases} \tag{8.1}$$

Здесь r - процентная ставка, а ρ_t принимает только два значения: $\rho_t \in \{a, b\}$. Тогда условие безарбитражности запишется следующим образом:

$$-1 < a < r < b.$$

Перейдем к дисконтированным ценам:

$$\begin{cases} X_t^0 = \tilde{B}_t = \dfrac{B_t}{B_t} = 1 \\ X_t^1 = \tilde{S}_t = \dfrac{S_t}{B_t} \end{cases}$$

Вспоминая (8.1), последнее равенство распишем следующим образом:

$$X_t^1 = \frac{1+\rho_t}{1+r} X_{t-1}^1.$$

Введем обозначение:

$$\gamma_t = \frac{1+\rho_t}{1+r} \in \{a_t', b_t'\}.$$

Для упрощения предположим, что $\ln a'$ и $\ln b'$ соизмеримы, то есть их отношение - рациональное число. Такое предположение нельзя считать существенным ограничением модели, но при этом вся динамика (относительно логарифмов цен) будет лежать на решетке с постоянным шагом. Никаких других дополнительных предположений относительно X делать не будем.

Для того, чтобы мера Q была бы мартингальной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1}^0 = X_t^0 \\ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \gamma_{t+1} X_t^1 = X_t^1 \end{cases}$$

X_t^0 - константа, не зависящая от времени и первое условие всегда выполнено. В силу адаптированности X_t^1 второе условие эквивалентно:

$$X_t^1\, \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \gamma_{t+1} = X_t^1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \gamma_{t+1} = 1.$$

Для недисконтированного случая, вспоминая, что $\gamma_{t+1} = \dfrac{1+\rho_{t+1}}{1+r}$, получим такое условие мартингальности меры:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \rho_{t+1} = r, \tag{8.2}$$

другими словами

$$a\mathsf{Q}\{\rho_{t+1} = a|\mathcal{F}_t\} + b\mathsf{Q}\{\rho_{t+1} = b|\mathcal{F}_t\} = r.$$

Обозначим $\mathsf{Q}\{\rho_{t+1} = a|\mathcal{F}_t\}$ через π_t. π_t удовлетворяет уравнению: $a\pi_t + b(1-\pi_t) = r$. Решением будет

$$\begin{cases} \pi_t = \dfrac{b-r}{b-a} \\ \pi_t' = 1 - \pi_t = \dfrac{r-a}{b-a} \end{cases}$$

(таким образом, $\pi_t = \pi \equiv \mathrm{const}$). Нетрудно видеть, что это решение будет неотрицательным и может быть интерпретированно как вероятностная мера, если только выполнено условие безарбитражности: $a < r < b$.

Итак, мартингальная мера существует тогда и только тогда, когда выполняется условие безарбитражности. При этом она единственна.

Пусть ζ – функция выплат некоторого обусловленного обязательства, справедливую цену которого мы должны расчитать. Тогда минимальный хедж находится следующим образом:

$$V_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathcal{M}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \zeta.$$

В силу единственности мартингальной меры: $V_t = \mathsf{E}\,\mathcal{F}_t \mathsf{Q}\zeta$. Из такого представления вытекает, что V_t - мартингал, представимый в виде:

$$V_t = V_0 + (H \circ X)_t - C_t, \text{ причем } C_t \equiv 0.$$

8.2 Применение модели Кокса-Росса-Рубенштейна к задаче ценообразования опциона call европейского типа

Для примера рассмотрим европейский опцион типа call с функцией выплат $\zeta = (X_T - K)_+$, где для выполнения условия однородности $K = kX_0$.

Справедливая цена будет считаться как

$$V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}^{\mathcal{F}_0} \zeta = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(S_T - K)_+ = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(B_T X_T - K)_+ = B_T \, \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(X_T - \tilde{k})_+.$$

Здесь введено обозначение: $\tilde{k} = \dfrac{K}{B_T}$. Цена рискового актива в терминальный момент времени в нашей модели находится следующим образом:

$$X_T^1 = X_0^1 \prod_{t=1}^{T} \gamma_t = X_0^1 \Big(\frac{1+a}{1+r}\Big)^{T-\nu} \Big(\frac{1+b}{1+r}\Big)^{\nu}$$

Получили аналог схемы Бернулли, где a интерпретируется как "успех", b - как "неудача", ν - число успехов в серии из T величин. ν - имеет биномиальное распределение:

$$\mathsf{P}(\nu = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = b(n, p, k).$$

Упражнение 8.1. *Записать через ν событие, эквивалентное событию* $\{X_T > k\}$.

Распишем справедливую цену опциона:

$$V_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \, \zeta = B_T \, \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(X_T - \tilde{k}) = \sum_{i=0}^{T} \mathsf{P}\{\nu = i\} \bigg(X_0 \Big(\frac{1+a}{1+r}\Big)^{T-i} \Big(\frac{1+b}{1+r}\Big)^{i} - \tilde{k} \bigg)_+.$$

Для достаточно больших i выражение в скобке будет положительным:

$$i \geqslant \frac{\ln \frac{\tilde{k}}{X_0} \left(\frac{1+r}{1+a}\right)^T}{\ln \left(\frac{1+b}{1+a}\right)} \Longrightarrow X_0 \Big(\frac{1+a}{1+r}\Big)^{T} \Big(\frac{1+b}{1+a}\Big)^{i} \geqslant \tilde{k}.$$

Обозначим

$$N = \left[\frac{\ln \frac{\tilde{k}}{X_0} \left(\frac{1+r}{1+a}\right)^T}{\ln \left(\frac{1+b}{1+a}\right)} \right] + 1,$$

и

$$B(T, N, p) = \sum_{k=N}^{T} b(T, k, p) = \mathsf{P}(\nu \geqslant N).$$

В этих обозначениях:

$$\mathsf{E}\,\mathsf{Q}(X_T - \tilde{k})_+ = \sum_{i=N}^{T} b\Big(T, i, \frac{r-a}{b-a}\Big) X_0 \Big(\frac{1+a}{1+r}\Big)^{T} \Big(\frac{1+b}{1+a}\Big)^{i} - \tilde{k} B\Big(T, N, \frac{r-a}{b-a}\Big),$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_T^i \Big(\frac{r-a}{b-a}\Big)^{T-i} \Big(\frac{b-r}{b-a}\Big)^{i} \Big(\frac{1+a}{1+r}\Big)^{T-i} \Big(\frac{1+b}{1+r}\Big)^{i} = B\Big(T, N, \frac{b-r}{b-a} \frac{1+b}{1+r}\Big).$$

Объединяя две последние формулы, получим

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \, \zeta = B_T X_0 B(T, N, \bar{\pi}) - K B(T, N, \pi),$$

где

$$\pi = \frac{r-a}{b-a}, \quad \bar{\pi} = \frac{b-r}{b-a}\frac{1+b}{1+r}.$$

Для получения премии полученную величину неоходимо дисконтировать:

$$\frac{\mathsf{E}\,\mathsf{Q}\zeta}{(1+r)^T} = X_0 B(T,N,\bar{\pi}) - \tilde{k} B(T,N,\pi).$$

Оказывается, что при измельчении шага по времени $\triangle t$ и устремлении его к нулю схема случайного блуждения будет слабо (по распределению) сходится к винеровскому процессу. Для этого необходимо только соответствующим образом центрировать и нормировать эту схему случайного блуждания (чтобы добиться сходимости к винеровскому процессу, а не к его линейному преобразованию).

Этот факт является содержимым теоремы Донскера. Схема доказательства ее такова:

- проверка выполнения условия относительной компактности семейства распределений.
- проверка сходимости конечномерных распределений.

9 Подход к хеджированию в среднем квадратическом

9.1 Постановка задачи

Рассмотренный ранее подход Крамкова дает гарантированный результат, но при этом стоимость опциона является несколько завышенной, так как происходит перестраховка и так как не учитываются свойства референтной меры. Динамику цен считаем на данном валютном рынке мартингальной. Требуется, чтобы при нашей стратегии хеджирования результат(стоимость портфеля в терминальный момент времени) был по возможности ближе к обусловленному обязательству (например в среднем квадратическом).

Задача, таким образом, ставится следующим образом:

Рассматривается стандартная модель: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$, где время $t = 1, \ldots, T$. Референтность меры P играет важную роль в данном случае, в отличие от ранее изложенных подходов, где нас интересовали лишь множества меры нуль. Будем считать, что имеется один рисковый и один безрисковый актив. А также то, что: стратегии самофинансируемые, цены дисконтриванные, рынок безарбитражный.

Введем следующие обозначения: $G_t = \sum\limits_t H_t \triangle X_t$ — процесс выйгрышей или убытков (gain), где H_t — предсказуемый процесс (стратегия), а X_t — дисконтированная цена. Тогда для капитала V_t выполняется $V_t = V_0 + G_t$.

Обусловленному обязательству соответствует $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина ζ с $\mathsf{E}\,\mathsf{P}\zeta^2 < \infty$. Процесс G_t определяется стратегией H_t, то есть $G_t = G_t(H)$.

Определение 9.1. ***Задача оптимального хеджирования***
Самофинансируемую стратегию H^* будем называть ***оптимальной в среднеквадратическом смысле****, если она минимизирует среднеквадратическое отклонение стоимости портфеля в терминальный момент от выплат по обусловленному обязательству, то есть:*

$$\mathsf{E}(\zeta - V_T(H^*))^2 \leqslant \mathsf{E}(\zeta - V_T(H))^2,$$

для всех самофинансируемых стратегий H.

Заметим, что

$$V_T(H^*) = V_0 + G_T(H^*),$$

поэтому минимизация производится и по V_0.

Замечание 9.1. *Для постановки задачи можно использовать и более сильное условие:*

$$\mathsf{E}^{\mathcal{F}_0}(\zeta - V_T(H^*))^2 \leqslant \mathsf{E}^{\mathcal{F}_0}(\zeta - V_T(H))^2.$$

При наших предположениях H^* не только существует, но и может быть выписано в явном виде, что и будет проделано ниже.

9.2 Поиск оптимальной стратегии

Введем сначала некоторые обозначения:

$$\beta_t = \frac{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\left[\triangle X_t \prod\limits_{s=t+1}^{T}(1-\beta_s \triangle X_s)\right]}{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\left[\triangle X_t^2 \prod\limits_{s=t+1}^{T}(1-\beta_s \triangle X_s)\right]}, \quad t = T, T-1, \ldots, 1. \tag{9.1}$$

В вышеприведенной формуле используется соглашение, что $\prod\limits_{s\in\varnothing} a_s = 1$.

$$\rho_t = \frac{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\left[\zeta \triangle X_t \prod\limits_{s=t+1}^{T}(1-\beta_s \triangle X_s)\right]}{\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\left[\triangle X_t^2 \prod\limits_{s=t+1}^{T}(1-\beta_s \triangle X_s)\right]}, \quad t = T, T-1, \ldots, 1. \tag{9.2}$$

Величины β_t и ρ_t определены корректно в силу квадратичной интегрируемости ζ. Рассчитываются они в обратном времени. После того как будут вычисленны все коэффициенты β_t и ρ_t, можно приступить к расчету оптимальной стратегии, причем для вычисления стратегии H_t на t-ом шаге нам не нужен весь вектор $H = (H_1, H_2, \ldots, H_T)$, а только лишь его часть $H^{(t)} = (H_1, \ldots, H_t)$.

Таким образом, V_t зависит лишь от части $H^{(t)}$ стратегии H. Оптимальная стратегия вычисляется по формуле:

$$\begin{cases} H_t = \rho_t - V_{t-1}(H^{(t-1)})\beta_t \\ V_t(H) = V_t(H^{(t)}) \end{cases}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{9.3}$$

Под стратегией H_t здесь понимается количество вложений в момент времени t в рисковый актив.

Введем следующее обозначение:

$$\pi_t = \prod_{s=t+1}^{T}(1-\beta_s \triangle X_s) \quad \text{и} \quad d\hat{\mathsf{P}} = C\pi_0 d\mathsf{P}.$$

Здесь C — нормирующая константа. Тогда, если $\pi_0 \geqslant 0$, то $\hat{\mathsf{P}}$ будет вероятностной мерой и относительно этой меры процесс X будет являтся мартингалом. Но в общем случае $\hat{\mathsf{P}}$ может быть и знакопеременным зарядом.

Определение 9.2. *Следующее условие называется условием невырожденности Шахермайера:*

$$\left(\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \triangle X_t\right)^2 \leqslant \delta\, \mathsf{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \triangle X_t^2,$$

где $0 < \delta < 1$.

Это условие было использовано Шахермейером при доказательстве (9.3), но в последние годы Нечаев смог провести доказательства без условия 9.2, откуда следует, что 9.2 является избыточным.

Пример 9.1 (показывающий возможность знакопеременности π_0). *Рассмотрим случай одношаговой задачи, то есть когда $T = 1$. Сделаем следующие допущения: $\mathcal{F}_0$ - тривиальная σ-алгебра, $\mathcal{F}_1 = \sigma(\eta)$. Возьмем произвольное $X_0 \geqslant 0$ измеримое относительно $\mathcal{F}_0$, то есть X_0 является константой. Пусть $X_1 = X_0 + \triangle X_1 \geqslant 0$. Обозначим $\triangle X_1 = \eta$. Из неотрицательности X_1 следует, что $\eta \geqslant -X_0$. Тогда $\beta_1 = \dfrac{m_1}{m_2}$, где $m_k = \mathsf{E}\eta^k$ (k-й момент η), $k = 1, 2$. Рассмотрим условие $1 - \beta_1\eta \geqslant 0$.*

Первый случай

$\eta = x$, где x - детерминированное значение.

Условие безарбитражности рынка приводит нас к двум безрисковым активам, а следовательно $x = 0$. Откуда $1 - \beta_1\eta \equiv 1 \geqslant 0$. В этом случае $\hat{\mathsf{P}}$ будет вероятностной мерой.

Второй случай

$$\eta = \begin{cases} x_1, & \textit{с вероятностью} \quad p_1 > 0 \\ x_2, & \textit{с вероятностью} \quad p_2 > 0 \end{cases},$$

причем не ограничивая общности рассуждений положим $x_1 < x_2$.

Условием безарбитражности в данном случае является $x_1 < 0 < x_2$. Проверим, что и в этом случае $\hat{\mathsf{P}}$ будет вероятностной мерой.

$$\begin{cases} m_1 = \mathsf{E}\eta = x_1p_1 + x_2p_2, \\ m_2 = \mathsf{E}\eta^2 = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \frac{x_1p_1 + x_2p_2}{x_1^2p_1 + x_2^2p_2}.$$

Надо проверить условие $1 - \beta_1\eta \geqslant 0$ при всех значениях, принимаемых η:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{x_1p_1 + x_2p_2}{x_1^2p_1 + x_2^2p_2}x_1 \geqslant 0 \\ 1 - \dfrac{x_1p_1 + x_2p_2}{x_1^2p_1 + x_2^2p_2}x_2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \geqslant \dfrac{x_1p_1 + x_2p_2}{x_1^2p_1 + x_2^2p_2}x_1 \\ 1 \geqslant \dfrac{x_1p_1 + x_2p_2}{x_1^2p_1 + x_2^2p_2}x_2 \end{cases}.$$

Продолжим цепочку преобразований:

$$\begin{cases} x_1^2p_1 + x_2^2p_2 \geqslant x_1^2p_1 + x_2x_1p_2 \\ x_1^2p_1 + x_2^2p_2 \geqslant x_1x_2p_1 + x_2^2p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2p_2 \geqslant x_2x_1p_2 \\ x_1^2p_1 \geqslant x_1x_2p_1 \end{cases}.$$

А это верно, так как правая часть каждого из этих неравенств больше нуля, а левая меньше нуля.

Третий случай

$$\eta = \begin{cases} x_1, & \textit{с вероятностью} \quad p_1 \\ x_2, & \textit{с вероятностью} \quad p_2 \\ x_3, & \textit{с вероятностью} \quad p_3 \end{cases},$$

причем $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$. Условием безарбитражности будет условие $x_1 < 0 < x_3$.

В данном случае условие $1 - \beta_1\eta \geqslant 0$ будет выполнятся только для некоторых значений η, то есть система $1 - \beta_1\eta < 0$ разрешима. Нетрудно проверкой убедиться, что решением будет например такой набор параметров:

$$X_0 = 3, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad p_1 = 0.1, \quad p_2 = 0.4, \quad p_3 = 0.5.$$

При таких параметрах $\beta_1 = 0.52$ и выражение $1 - \beta_1\eta$ отрицательно с ненулевой вероятностью. Этим мы показали, что π_0 может быть знакопеременным.

9.3 Расчет справедливой цены обусловленного обязательства

Мы уже выяснили, как найти хеджирующую стратегию с помощью коэффициентов β_t, и $\rho_t s$. Теперь будем расчитывать справедливую цену обусловленного обязательства, то есть V_0 соответствующий оптимальрой стратегии.

Оптимальное V_0 будет расчитываться следующим образом:

$$V_0^{\text{opt}} = \int \zeta d\hat{\mathsf{P}}, \quad \text{где } \frac{d\hat{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}} = C\prod_{s=1}^{T}(1-\beta_s \triangle X_s).$$

В общем случае, $\hat{\mathsf{P}}$ может быть знакопеременной мерой (зарядом). Однако, если $\triangle X_t$ принимает одно или два значения, то такой случай невозможен. Предыдущий пример показывает, что если $\triangle X_t$ принимает 3 значения, то $\hat{\mathsf{P}}$ может уже и не быть вероятностной мерой.

Пример 9.2. *Параметры первого примера остаются неизменными. Расчитаем справедливую цену для европейского опциона call:*

$$\zeta = (X_1 - 4.5)_+ = \max\{0, X_1 - 4.5\}.$$

Так как H_1 предсказуемо, то оно измеримо относительно F_0, и следовательно $H_1 =$ const. Фактически, мы будем решать задачу регрессии:

$$\zeta \approx \alpha + \beta \triangle X_1.$$

Поэтому оптимальным решением будут

$$H_1 = \frac{\operatorname{cov}(\zeta, \triangle X_1)}{\mathsf{D}(\triangle X_1)}$$
$$V_0 = \mathsf{E}\,\zeta - H_1\,\mathsf{E}\triangle X_1$$

Произведем теперь необходимые выкладки:

$$X_1 = X_0 + \triangle X_1 = \begin{cases} 2, & p = 0.1 \\ 4, & p = 0.4 \\ 5, & p = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \zeta = \begin{cases} 0, & p = 0.1 \\ 0, & p = 0.4 \\ 0.5, & p = 0.5 \end{cases}$$

$$\mathsf{E}\,\zeta = 0.25$$
$$\operatorname{cov}(\zeta, \triangle X_1) = \mathsf{E}(\zeta - \mathsf{E}\,\zeta)(\triangle X_1 - \mathsf{E}\triangle X_1) = \mathsf{E}\,\zeta\triangle X_1 - \mathsf{E}\,\zeta\,\mathsf{E}\triangle X_1 = 0.175$$
$$\mathsf{D}(\triangle X_1) = \mathsf{E}(\triangle X_1 - \mathsf{E}\triangle X_1)^2 = \mathsf{E}\triangle X_1^2 - (\mathsf{E}\triangle X_1)^2 = 0.81.$$

Окончательно получаем: $H_1 = 0.216$, $V_0 = -0.031$.

Полученный результат нельзя считать удовлетворительным, так как продавец опциона должен заплатить в начальный момент времени и еще взять на себя выполнение некоторых обязательств. Такой результат получился в связи с тем, что в исходной модели был заложен не совсем разумный критерий оптимальности.

10 Функция полезности. Подход фон Неймана – Моргенштерна

Подход Фон-Неймана - Моргенштейна (на основе среднего) заключается в сравнивнении средних полезностей некоторых случайных величин, и построении предпочтения на основе этого сравнения. Отношение предпочтения между X и Y задается следующим образом:

$$P_X \prec P_Y \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{E}\, u(X) \leqslant \mathsf{E}\, u(Y).$$

Функция полезности u определена с точностью до аффинного преобразования, то есть две функции полезности, полученные друг из друга аффиными преобразованиями будут всегда формировать одно и то же предпочтение.

$u(x)$ – монотонно возрастающая (условие отсутствия насыщения), ее вогнутость соответствует несклонности лица, формирующего предпочтение, к риску.

В терминах функций полезности условие $\mathsf{E}(V_1 - \zeta)^2 \to \min$ означает существование насыщения, то есть существование максимума у вогнутой функции полезности.

Подход фон Неймана-Моргенштерна, основанный на ожидаемой полезности, отличается от классического подхода, основанного на функции полезности. В первом случае сравниваются распределения, а во втором — некоторые величины. Классическая функция полезности определяется с точностью до монотонного преобразования, а функция фон Неймана-Маргенштейна - с точностью до аффинного преобразования.

Подход фон Неймана-Моргенштерна позволяет формализовать отношение к риску. Так скажем неприятие риска характеризуется вогнутостью функции полезности. Этот подход может быть использован для формализации поведения инвесторов на рынке. Даже разумные инвесторы ведут себя, как правило, непоследовательно и могут ошибаться, даже если придерживаются определенной линии в поведении.

Риск нейтральное поведение можно охарактеризовать линейной функцией полезности $u(x) = x$, или, что то же самое, $u(x) = a + bx$. В этом случае ожидаемая полезность $\mathsf{E}\, u(X) = \mathsf{E}\, X$ не зависит от $\mathsf{D}\, X$. Поэтому этот случай называется риск-нейтральным.

Каждому распределению в случае строго возрастающей функции полезности (ненасыщаемость) можно сопоставить безрисковый эквивалент. Другими словами, найдется точка x_0 для которой распределение, в ней сосредоточенное эквивалентно заданному распределению P_X:

$$u(x_0) = \mathsf{E}\, u(X), \quad x_0 = u^{-1}(\mathsf{E}\, u(X)).$$

Для риск-нейтрального случая: $x_0 = \mathsf{E}\, X$. Если безрисковый эквивалент $x_0 < \mathsf{E}\, X$, то ЛПР с такой $u(x)$ не склонен к риску. Это и есть неравенство Йенсена, справедливое для вогнутых функций.

Для характеризации степени неприятия (отвращения) риска (risk aversion) введем коэффициенты Эрроу-Пратта:

$$A_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0, \quad A_r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} x > 0, \quad T_a = \frac{1}{A_a}, \quad T_r = \frac{1}{A_r}.$$

A_a — коэффициент абсолютного локального неприятия риска (размерность 1/деньги). A_r — относительный коэффициент Эрроу-Пратта (безразмерный). T_a, T_r коэффициенты толерантности. Все четыре коэффициента инвариантны относительно афинного преобразования и носят локальный характер.

Пример 10.1. *Экспоненциальная полезность:* $u(x) = -e^{-\lambda x}$, *где* $\lambda > 0$.

Еще одно семейство функций: $u'(x) = x^{-\alpha} > 0$, *только* $x > 0$. *Тогда* $u''(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$.

- $\alpha = 0$, $u(x) = x$.
- $0 < \alpha < 1$, $u(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
- $\alpha = 1$, $u(x) = \ln(x)$.
- $\alpha > 1$, $u(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Поищем те функции полезности, которые соответствуют случаю независимости предпочтений от стартового капитала.

$$u(w+x) = a(w) + b(w)u(x)$$

При афинном преобразовании локальный коэффициент неприятия риска сохраняется, и поэтому он постоянен $-\frac{u''}{u'} = \mathrm{const}$. Решением такого уравнения является экспоненциальная функция полезности.

11 Задача оптимального инвестирования

Рассмотрим рынок с $d+1$ активом, предположим отсутствие арбитражных возможностей. Имеется горизонт инвестирования T (он может быть как конечным, так и бесконечным). Как всегда, математически такая модель формализуется с помощью фильтрованного вероятностного пространства: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$.

Рассмотрим задачу оптимального инвестирования, заключающуюся в следующем. Потребление в каждый момент времени равно нулю ($C_t \equiv 0$) и требуется максимизировать полезность в конечный момент времени:

$$\mathsf{E}\, u(V_T) \to \max .$$

Можно понимать такую задачу как потребление всего капитала в терминальный момент времени.

В случае, если не запрещать потребление и в остальные момены времени, необходима модифицированная функция полезности, учитывающая все потребления:

$$U(C_1, C_2, ..., C_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta_t u_t(C_t). \tag{11.1}$$

Определение 11.1. *Под условием ненасыщаемости будем понимать строгое возрастание U по каждому аргументу:* $\dfrac{\partial U}{\partial C_i} > 0$.

Условие неприятия к риску математически означает, что матрица $\dfrac{\partial^2 U}{\partial C_i \partial C_j}$ отрицательно определена.

Для простоты в дальнейшем будем полагать, что рисковый актив беспроцентный.

Определение 11.2. ***Принцип предпочтения ликвидности*** *полагается выполненым, если для $t_2 > t_1$, $\triangle C > 0$ справедливо соотношение:*

$$U(C_1, \ldots, C_{t_1}, \ldots, C_{t_2}, \ldots, C_T) > U(C_1, \ldots, C_{t_1} - \triangle C, \ldots, C_{t_2} + \triangle C, \ldots, C_T).$$

Эквивалентная форма записи:

$$\frac{\partial U}{\partial C_{t_1}} > \frac{\partial U}{\partial C_{t_2}}.$$

Смысл этого принципа в том, что инвестор предпочтет получить $\triangle C$ как можно раньше, чтобы никого не кредитовать беспроцентно.

Проверим выполнение принципа предпочтения ликвидности для функций вида (11.1):

$$\frac{\partial U}{\partial C_{t_1}} = \beta_{t_1} \frac{\partial u}{\partial C_{t_1}} > \beta_{t_2} \frac{\partial u}{\partial C_{t_2}} = \frac{\partial U}{\partial C_{t_2}}.$$

Такое условие не выполняется для всех C, а значит задача поставленна некорректно. Остается сделать вывод о том, что предположение об индифферентности в прошлом и будущем (независимости полезности потребления от потребления в прошлом и будующем) несостоятельно. Сказанное математически формализуется следующим образом:

$$U(C_1, \dots, C_T) = a(C_1, \dots, C_{t-1}, C_{t+1}, \dots, C_T)u_t(C_t) + b(C_1, \dots, C_{t-1}, C_{t+1}, \dots, C_T). \tag{11.2}$$

Пример 11.1. *Найти вид функции U, для которой справедливо (11.2).*

Для одношаговой задачи оптимального инвестирования представляет интерес зависимость вложения в рисковый актив от начального капитала. Возможны три случая:

- $\frac{\partial H^1}{\partial V_0} < 0$. Случай паталогической жадности — уменьшение вложений при увеличении капитала. $A_a(x)$ возрастает.
- $\frac{\partial H^1}{\partial V_0} = 0$. Соответствует случаю $A_a(x) = \mathrm{const}$ – экспоненциальной функции полезности. Очень осторожный инвестор.
- $\frac{\partial H^1}{\partial V_0} > 0$. Соответствует случаю убывания $A_a(x)$.

12 Задача о гарантированном хеджировании

12.1 Несколько определений

Определение 12.1. *Числовая функция называется полунепрерывной снизу в точке x_0, если $\forall\varepsilon$ найдется окрестность этой точки, в которой $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.*

Пример 12.1. *1. Индикатор произвольного открытого множества является полунепрерывной снизу функцией.*

2.

$$f(x) = \begin{cases} \sin 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Такая функция будет полунепрерывна снизу, если $a \leqslant -1$.

Эквивалентными определениями полунепрерывности снизу являются

- замкнутость надграфика
- $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$

Упражнение 12.1. *Доказать, что произвольную полунепрерывную снизу функцию можно представить в виде предела монотонно неубывающей последовательности непрерывных функций.*

Если f_α - семейство полунепрерывных снизу функций, то $f(x) = \sup\limits_\alpha f_\alpha(x)$ снова будет полунепрерывна снизу.

12.2 Постановка задачи и некоторые результаты

Пусть к моменту t известны цены активов $X_0, ..., X_t$ и некоторая дополнительная информация $Y_0, ..., Y_t$. Заметим, что на природу Y_k не накладывается никаких ограничений, достаточно, чтобы это были элементы какого-нибудь достаточно хорошего пространства (например, польского). Смоделируем дальнейший процесс цен, используя уже доступную информацию о ценах. Обозначим

$$\mathsf{P}_{X_{t+1},Y_{t+1}\Big|\substack{X_1=x_1,\dots,X_t=x_t\\ Y_1=y_1,\dots,Y_t=y_t}}(B) = Q_t\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, B\right)$$

— условное распределение $\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix}$ при известных значениях $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$. $Q_t(x, A)$ является переходным ядром.

Определение 12.2. *Пусть даны измеримые пространства $(X, \mathcal{X})$ и $(Y, \mathcal{Y})$.* ***Переходным ядром*** *назвывается отображение $Q : X \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^1$ такое, что Q измеримо по первому аргументу при фиксированном втором, и является мерой по второму аргументу, при фиксированном первом.*

Определение 12.3. *Переходное ядро Q называется* ***стохастическим****, если $Q(x, \cdot)$ является вероятностной мерой для любого $x \in X$.*

Каждому переходному ядру ставится в соответствие инегральный оператор: $Qf(x) = \int Q(x, dy)f(y)$. Обозначим $C(X)$ - пространство ограниченных и непрерывных функций на X, $LSC(X)$ - класс полунепрерывных снизу ограниченных функций.

Определение 12.4. *Говорят, что Q_t обладает* ***феллеровским*** *свойством (является феллеровским переходным ядром), если любая непрерывная ограниченная функция переходит снова в непрерывную функцию (т.е. $Q_t : C(X) \to C(X)$). Q_t* ***субфеллеровское****, если $Q_t : LSC(X) \to LSC(X)$.*

Упражнение 12.2. *На компактном множестве полунепрерывная снизу и ограниченная функция достигает своего минимума.*

Утверждение 12.1 (Критерий феллеровости переходного ядра). *Ядро обладает феллеровским свойством, тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto Q(x, \cdot)$ непрерывно в слабой топологии на семействе мер.*

Утверждение 12.2. *Критерий слабой сходимости: $\mathsf{P}_n \to \mathsf{P}$ слабо тогда и только тогда, когда для произвольной $f \in LSC(X)$ выполняется*

$$\liminf_n \int f(x)\mathsf{P}_n(dx) \geqslant \int f(x)\mathsf{P}(dx).$$

Вернемся к задаче ценообразования.

$$\xi_t^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{P}\in\mathcal{M}(X)} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}^{\mathcal{F}_t}\, \xi_{t+1}^*$$

Последнее равенство в терминах переходных ядер можно переписать в виде:

$$\xi_t^* = \sup_{\mathsf{P}\in\mathcal{M}(X)} \int \xi_{t+1}^* Q_t\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, du\Big).$$

Мы будем брать супремум по мерам с феллеровским переходным оператором(отказываемся от условия эквивалентности мер).

Рассмотрим следующую задачу максимизации (ее еще называют проблемой моментов): $\int f(x)\mu(dx) \to \max\limits_{\mu \in \mathcal{N}}$, где $\mathcal{N} = \left\{ \mu : \begin{pmatrix} \int g_1 d\mu \\ \dots \\ \int g_k d\mu \end{pmatrix} \in D \right\}$, D – выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^k$. Существует очень полезный для решения нашей задачи результат:

Утверждение 12.3. *Решение проблемы моментов достигается на мере, сосредоточенной на не более чем k точках.*

В нашем случае от меры необходимо потребовать, чтобы она была вероятностной и мартигальной. В данных обозначениях эти условия можно переписать следующим образом:

$$\begin{array}{ll} g_1(x) \equiv 1 & \int g_1 d\mu = 1, \\ g_2(x) = x & \int g_1 d\mu = 0. \end{array}$$

Из результата 12.3, следует, что оптимальная мера μ будет сосредоточена не более чем в двух точках.

Пусть $f(x)$ выпукла и ее носитель $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq [a, b]$. Оказывается, что оптимальная мера при решении задачи максимизации сосредоточенна в двух точках – a и b.

12.3 Экзаменационная задача

Рассмотрим следующие опционы типа call.

- Опцион lookback: $\zeta = (X_T - \min\limits_t X_t)_+$.
- Азиатский опцион: $\zeta = (X_T - \frac{1}{T+1} \sum\limits_{t=0}^{T} X_t)_+$.

Предположим, что безрисковый актив беспроцентен, наблюдаются только цены X_t. Кроме того, пусть: $X_{t+1} = X_t \exp(\eta_t)$, где $\eta_t \in [a, b]$ $(\mathrm{supp}(P_{\eta_t}) \subseteq [a, b])$.

Требуется найти

- премию для опциона
- хэджирующую стратегию

Решения к задачам и упражнениям

1.1

Одно из возможных решений, использующее неравенство Йенсена для условного мат. ожидания (для выпуклой функции $f(x)$ справедливо: $\mathsf{E}^{\mathcal{A}} f(\xi) \geqslant f\big(\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\xi\big)$).

Пусть $\xi \in L_q(\mathsf{P})$, т.е. $\mathsf{E}\,|\xi|^q < \infty$. Применяя неравенство Йенсена для функции $f(x) = |x|^q$, получаем: $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,|\xi|^q \geqslant |\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi|^q$. Отсюда: $\infty > \mathsf{E}\,|\xi|^q = \mathsf{E}\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,|\xi|^q \geqslant \mathsf{E}\,|\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi|^q$, т.е показали, что $\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \in L_q(\mathsf{P})$, т.е. $\mathsf{E}^{\mathcal{A}} : L_q(\mathsf{P}) \to L_q(\mathsf{P})$.

1.2

Пусть ξ имеет распределение Коши. Известно, что у величины ξ мат. ожидание не определено.

Рассмотрим σ-алгебру, порожденную 3-мя событиями (систему из этих событий обозначим $\mathcal{K}$): $\mathcal{K} = \big\{\{\xi \in (-\infty, -1)\},\ \{\xi \in [-1, -1]\},\ \{\xi \in (1, \infty)\}\big\}$, $\mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{K}\}$. Условное мат. ожидание относительно $\mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{K}\}$ определено, но *не конечно*.

Рассмотрим теперь такую систему множеств: $\mathcal{K}' = \big\{\{\xi \in [m, m{+}1]\},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\big\}$. Здесь условное мат.ожидание относительно $\mathcal{A}' = \sigma\{\mathcal{K}\}$ $\mathsf{E}^{\mathcal{A}'}\,\xi$ *конечно*.

1.3

$$\langle \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi, \xi\rangle_{L_2} \equiv \mathsf{E}\big(\xi\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\big) = \mathsf{E}\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\big(\xi\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\big) = \mathsf{E}\,\big(\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\big) \equiv \langle \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi, \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\rangle_{L_2}$$

1.4

1.5

Итак, необходимо найти распределение случайной величины $\eta = \mathsf{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$. В данном случае распределение η будет дискретным: $\eta \in \{a_1, a_2, \dots\}$, где $a_i = \dfrac{\mathsf{E}\,(1_{A_i}\xi)}{\mathsf{E}\,1_{A_i}} = \dfrac{\mathsf{E}\,(1_{A_i}\xi)}{\mathsf{P}(A_i)}$, причем $\mathsf{P}(\eta = a_i) = \mathsf{P}(A_i)$. Убедиться, что это так, можно непосредственной проверкой условий из определения условного мат. ожидания.

2.1

Итак, $\xi \in L_2(\mathsf{P})$ – мартингал. Докажем, что его приращения некоррелированы, т.е. для произвольных $0 \leqslant n < m$ выполняется: $\mathsf{E}(\xi_{n+1} - \xi_n)(\xi_{m+1} - \xi_m) = 0$. Доказательство этого факта можно достичь следующими действиями:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\big((\xi_{n+1} - \xi_n)(\xi_{m+1} - \xi_m)\big) &= \mathsf{E}\,\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{n+1}}\,\big((\xi_{n+1} - \xi_n)(\xi_{m+1} - \xi_m)\big) = \\ &\mathsf{E}\,\big((\xi_{n+1} - \xi_n)\,\mathsf{E}^{\mathcal{F}_{n+1}}(\xi_{m+1} - \xi_m)\big) = \mathsf{E}\,\big((\xi_{n+1} - \xi_n)\cdot 0\big) = 0.\end{aligned}$$

2.2

Построим мартингал $(X_t)_{t\geqslant 0}$ с зависимыми приращениями. Пусть X_0 – случайная величина со следующим распределением: $X_0 \in \{-1, 0, 1\}$, $\mathsf{P}(X_0 = -1) = \mathsf{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(X_0 = 0) = \frac{1}{2}$. Обозначим через ξ_t последовательность независимых случайных величин, принимающих с вероятностью $1/2$ значения -1 и 1. Определим приращения процесса X следующим образом:

$$\triangle X_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \triangle X_{j-1} \in \{-1, 1\} \\ \xi_j, & \text{если } \triangle X_{j-1} = 0. \end{cases}$$

Таким образом определенный процесс действительно будет являтся мартингалом с зависими приращениями (проверьте это сами!)

2.3

Покажем сначала, что для произвольного $\xi \in L_2(\mathsf{P})$ и для любой σ-алгебры $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ справедливо:

$$\mathsf{D}\left(\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\xi\right) \leqslant \mathsf{D}\,\xi. \tag{12.1}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $X_0 = 0$. Тогда $\mathsf{D}\left(\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\xi\right) = \mathsf{E}(\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\xi)^2 = \|\mathsf{E}^{\mathcal{A}}\xi\|_{L_2}^2$. Вспоминая, что оператор условного математического ожидания является ортогональным проектором в L_2 (см. упражнение 1.3), получаем что наше утверждение (12.1) действительно имеет место.

Тепрь, пусть X – мартингал относительно $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \dots\}$. Применяя свойство (12.1) для $\xi = X_{n+1}$, $\mathcal{A} = \mathcal{F}_n$ $(n \geqslant 0)$, получаем требуемое утверждение:

$$\mathsf{D}\left(\mathsf{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1}\right) = \mathsf{D}\,X_n \leqslant \mathsf{D}\,X_{n+1}.$$

6.1

Заметим, что

$$\{\tau_A = t\} = \{X_t \in A\} \cup \bigcup_{s=0}^{t-1}\{X_s \in A^C\}.$$

Каждое из множеств $\{X_t \in A\}$, $\{X_s \in A^C\}$ измеримо относительно $\mathcal{F}_t$, следовательно, $\{\tau_A = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Список литературы

[1] А.Н.Ширяев «Основы стохастической финансовой математики». М.: Фазис, 1998.

[2] А.В.Мельников «Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет ценных бумаг». М.: ТВП, 1997.

[3] Руди, Вейслер «Арбитраж...»

Содержание